



Punkte  
**20**

## Aufgabe 1 Numerische Differentiation

Gegeben ist folgende Gleichung:

$$f(x) = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{3}{5}x^2$$

- Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion analytisch. [5 Pkt.]
- Bestimmen Sie die Vorwärts-Differenzen-Quotienten erster Ordnung im Intervall  $I = [-4 : 4]$  im äquidistanten Abstand  $h = 1$  (Die Rechnungen sind auf drei Nachkommastellen durchzuführen). [5 Pkt.]
- Bestimmen Sie die Fehlergröße der Differenzen-Quotienten zur analytischen Lösung mit  $\epsilon = \dot{f}(x) - D_{f+,x_i}$ . [5 Pkt.]
- Bestimmen Sie die symmetrischen Differenzen-Quotienten zweiter Ordnung im Intervall  $I = [-4 : 4]$  im äquidistanten Abstand  $h = 1$ . [5 Pkt.]

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die gegebene Tabelle ein.

$x$	$f(x)$	$D_{f+,x_i}$	$\dot{f}(x)$	$\epsilon$	$D_{f,x_i}^2$
-4					
-3					
-2					
-1					
0					
1					
2					
3					
4					



**Lösung:**

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion analytisch. [5 Pkt.]

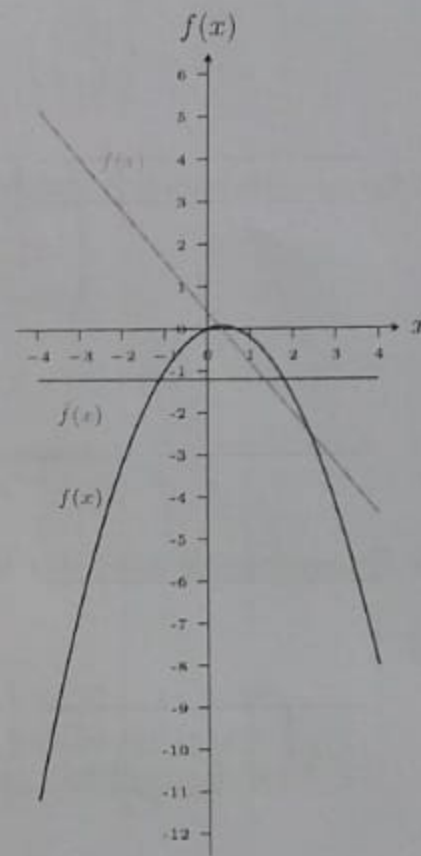
$$f(x) = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{3}{5}x^2$$

Die erste Ableitung berechnet sich zu:

$$\dot{f}(x) = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}x$$

Die zweite Ableitung berechnet sich zu:

$$\ddot{f}(x) = -\frac{6}{5} = 1,2$$



- b) Bestimmen Sie die Vorwärts-Differenzen-Quotienten erster Ordnung im Intervall  $I = [-4 : 4]$  im äquidistanten Abstand  $h = 1$  (Die Rechnungen sind auf drei Nachkommastellen durchzuführen). [5 Pkt.]
- c) Bestimmen Sie die Fehlergröße der Differenzen-Quotienten zur analytischen Lösung. [5 Pkt.]
- d) Bestimmen Sie die symmetrischen Differenzen-Quotienten zweiter Ordnung im Intervall  $I = [-4 : 4]$  im äquidistanten Abstand  $h = 1$ . [5 Pkt.]

$x$	$f(x)$	$D_{f+,x_i}$	$\dot{f}(x)$	$\epsilon$	$D_{f,x_i}^2$
-4	-11,200	4,600	5,200	0,600	
-3	-6,600	3,400	4,000	0,600	-1,200
-2	-3,200	2,200	2,800	0,600	-1,200
-1	-1,000	1,000	1,600	0,600	-1,200
0	0,000	-0,200	0,400	0,600	-1,200
1	-0,200	-1,400	-0,800	0,600	-1,200
2	-1,600	-2,600	-2,000	0,600	-1,200
3	-4,200	-3,800	-3,200	0,600	-1,200
4	-8,000		-4,400		

## Aufgabe 2 2D-Faltung

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}; \quad \underline{G}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \underline{G}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie folgende Rechnungen durch:

$$\underline{Y}_1 = \underline{S} * \underline{G}_1 \quad [2.5 \text{ Pkt.}]$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{S} * \underline{G}_2 \quad [2.5 \text{ Pkt.}]$$

$$\underline{Y} = \sqrt{\underline{Y}_1^2 + \underline{Y}_2^2} \quad [5 \text{ Pkt.}]$$

Hinweis: Die Quadratur als auch das Radizieren sind elementweise durchzuführen! Tragen Sie ihre Ergebnisse unten ein.

$$\underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad \underline{Y}_1^2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad \underline{Y}_2^2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

$$\underline{Y}^2 = \underline{Y}_1^2 + \underline{Y}_2^2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{0.5} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 6 & 4 & -10 \\ -8 & -10 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_1^2 = \begin{pmatrix} 4 & 36 & 64 \\ 36 & 16 & 100 \\ 64 & 100 & 324 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -6 & -4 & 10 \\ 8 & 10 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_2^2 = \begin{pmatrix} 4 & 36 & 64 \\ 36 & 16 & 100 \\ 64 & 100 & 324 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}^2 = \underline{Y}_1^2 + \underline{Y}_2^2 = \begin{pmatrix} 8 & 72 & 128 \\ 72 & 32 & 200 \\ 128 & 200 & 648 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 8 & 72 & 128 \\ 72 & 32 & 200 \\ 128 & 200 & 648 \end{pmatrix}^{0,5} = \begin{pmatrix} 2,8284 & 8,4853 & 11,3137 \\ 78,4853 & 5,6569 & 14,1421 \\ 11,3137 & 14,1421 & 25,4558 \end{pmatrix}$$

- b) Entwickeln Sie eine Topologie zur technischen Umsetzung der 2D-Faltung auf einem FPGA. Die Berechnung des Ergebnisvektors muss parallel erfolgen. Ihre Lösung darf keine Rekursion enthalten! Nutzen Sie zur Herleitung folgenden Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x[0,0] & x[0,1] \\ x[1,0] & x[1,1] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} g[-1,-1] & g[-1,0] & g[-1,1] & g[-1,2] \\ g[0,-1] & g[0,0] & g[0,1] & g[0,2] \\ g[1,-1] & g[1,0] & g[1,1] & g[1,2] \\ g[2,-1] & g[2,0] & g[2,1] & g[2,2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y[0,0] & y[0,1] & y[0,2] \\ y[1,0] & y[1,1] & y[1,2] \\ y[2,0] & y[2,1] & y[2,2] \end{pmatrix}$$

Begründen Sie ihre Lösung formal (Gleichungssystem angeben)! [10 Pkt.]

**Lösung:**

Die strukturelle Anordnung einer technischen Lösung findet bei der Betrachtung der Gleichungssysteme für die Berechnung der einzelnen Matrixkomponenten.

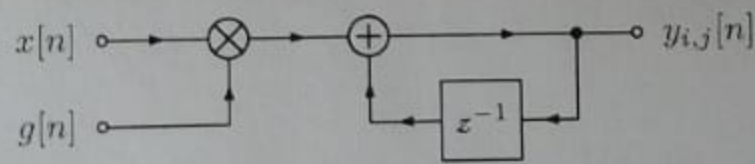
# Modellbasierter Entwurf

$$\begin{aligned}
 y[0,0] &= x[0,0] \cdot g[0,0] + x[0,1] \cdot g[0,-1] + x[1,0] \cdot g[-1,0] + x[1,1] \cdot g[-1,-1] \\
 y[0,1] &= x[0,0] \cdot g[0,1] + x[0,1] \cdot g[0,0] + x[1,0] \cdot g[-1,1] + x[1,1] \cdot g[-1,0] \\
 y[0,2] &= x[0,0] \cdot g[0,2] + x[0,1] \cdot g[0,1] + x[1,0] \cdot g[-1,2] + x[1,1] \cdot g[-1,1] \\
 y[1,0] &= x[0,0] \cdot g[1,0] + x[0,1] \cdot g[1,-1] + x[1,0] \cdot g[0,0] + x[1,1] \cdot g[0,-1] \\
 y[1,1] &= x[0,0] \cdot g[1,1] + x[0,1] \cdot g[1,0] + x[1,0] \cdot g[0,1] + x[1,1] \cdot g[0,0] \\
 y[1,2] &= x[0,0] \cdot g[1,2] + x[0,1] \cdot g[1,1] + x[1,0] \cdot g[0,2] + x[1,1] \cdot g[0,1] \\
 y[2,0] &= x[0,0] \cdot g[2,0] + x[0,1] \cdot g[2,-1] + x[1,0] \cdot g[1,0] + x[1,1] \cdot g[1,-1] \\
 y[2,1] &= x[0,0] \cdot g[2,1] + x[0,1] \cdot g[2,0] + x[1,0] \cdot g[1,1] + x[1,1] \cdot g[1,0] \\
 y[2,2] &= x[0,0] \cdot g[2,2] + x[0,1] \cdot g[2,1] + x[1,0] \cdot g[1,2] + x[1,1] \cdot g[1,1]
 \end{aligned}$$

Als zeitlich diskrete Formulierung berechnet sich beispielhaft  $y[0,0]$  zu:

$$y_{0,0}[n] = x_{0,0}[n] \cdot g_{0,0}[n] + x_{0,1}[n-1] \cdot g_{0,-1}[n-1] + x_{1,0}[n-2] \cdot g_{-1,0}[n-2] + x_{1,1}[n-3] \cdot g_{-1,-1}[n-3]$$

Eine rekursive Form zur Realisierung einer Position der Ergebnismatrix ist wie folgt anzugeben:

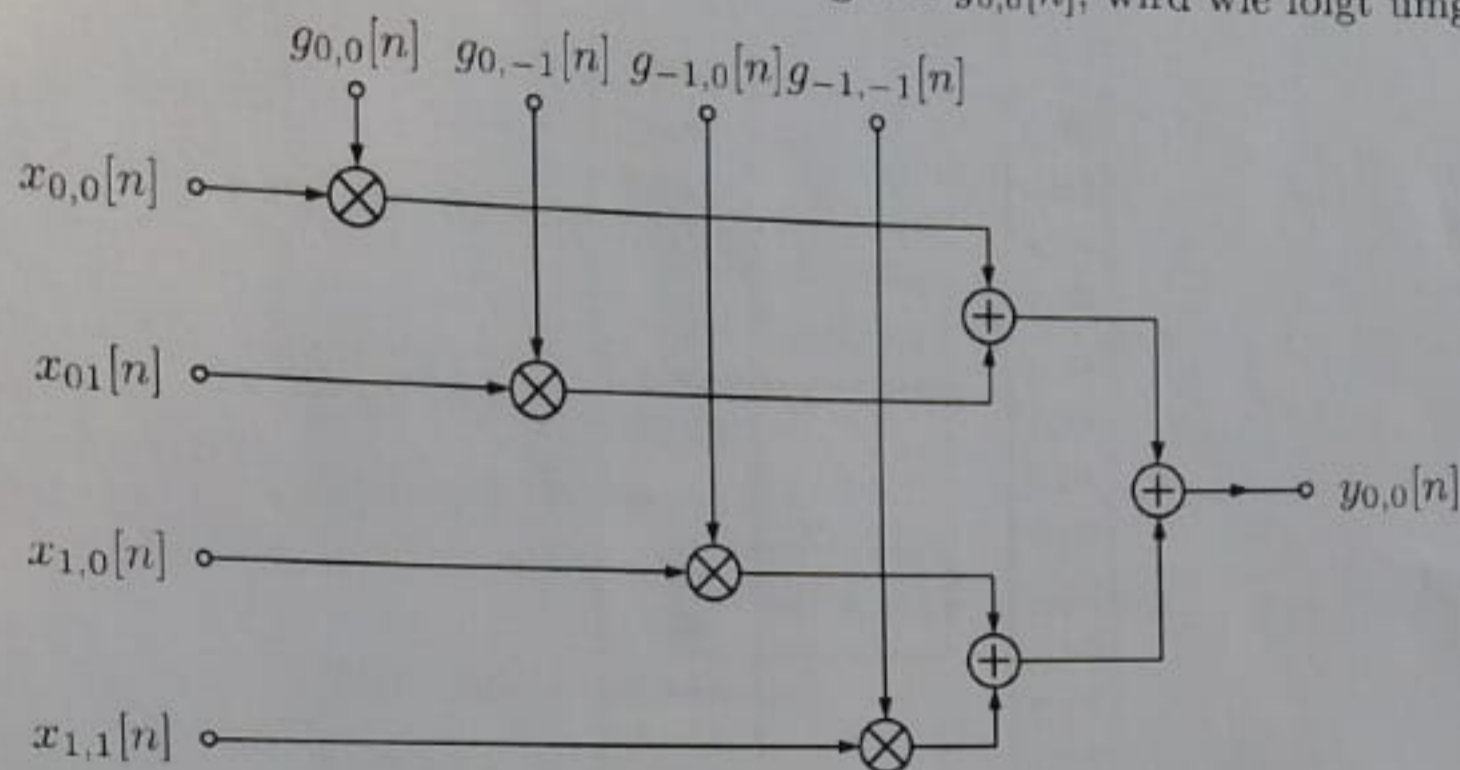


Als zeitdiskrete Signalfolge gilt:

$$\begin{aligned}
 \underline{X}[n] &= [x_{0,0} \quad x_{0,1} \quad x_{1,0} \quad x_{1,1}] \\
 \underline{G}[n] &= [g_{0,0} \quad g_{0,-1} \quad g_{-1,0} \quad g_{-1,-1}]
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis für  $y_{0,0}[n]$  ist nach vier Taktzyklen berechnet.

Eine parallele Realisierung, beispielhaft zur Berechnung von  $y_{0,0}[n]$ , wird wie folgt umgesetzt:



Der Eingangsspaltenvektor  $\underline{X}[n]$  als auch die Multiplikatoren  $\underline{G}_{i,j}[n]$  liege zeitgleich an der kombinatorischen Recheneinheit an.

$$\underline{X}[n] = \begin{bmatrix} x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}[n] = \begin{bmatrix} g_{0,0} \\ g_{0,-1} \\ g_{-1,0} \\ g_{-1,-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y}[n] = y_{0,0}[n]$$

Nutzen der parallelen Struktur würde bedeuten, dass zur Berechnung der Elemente der  $3 \times 3$ -Ergebnismatrix 2 mal 9 Spaltenvektoren nacheinander berechnet werden.

$$\underline{X}[n] = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} & x_{0,0} \\ x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} & x_{0,1} \\ x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} & x_{1,0} \\ x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} & x_{1,1} \end{bmatrix}$$

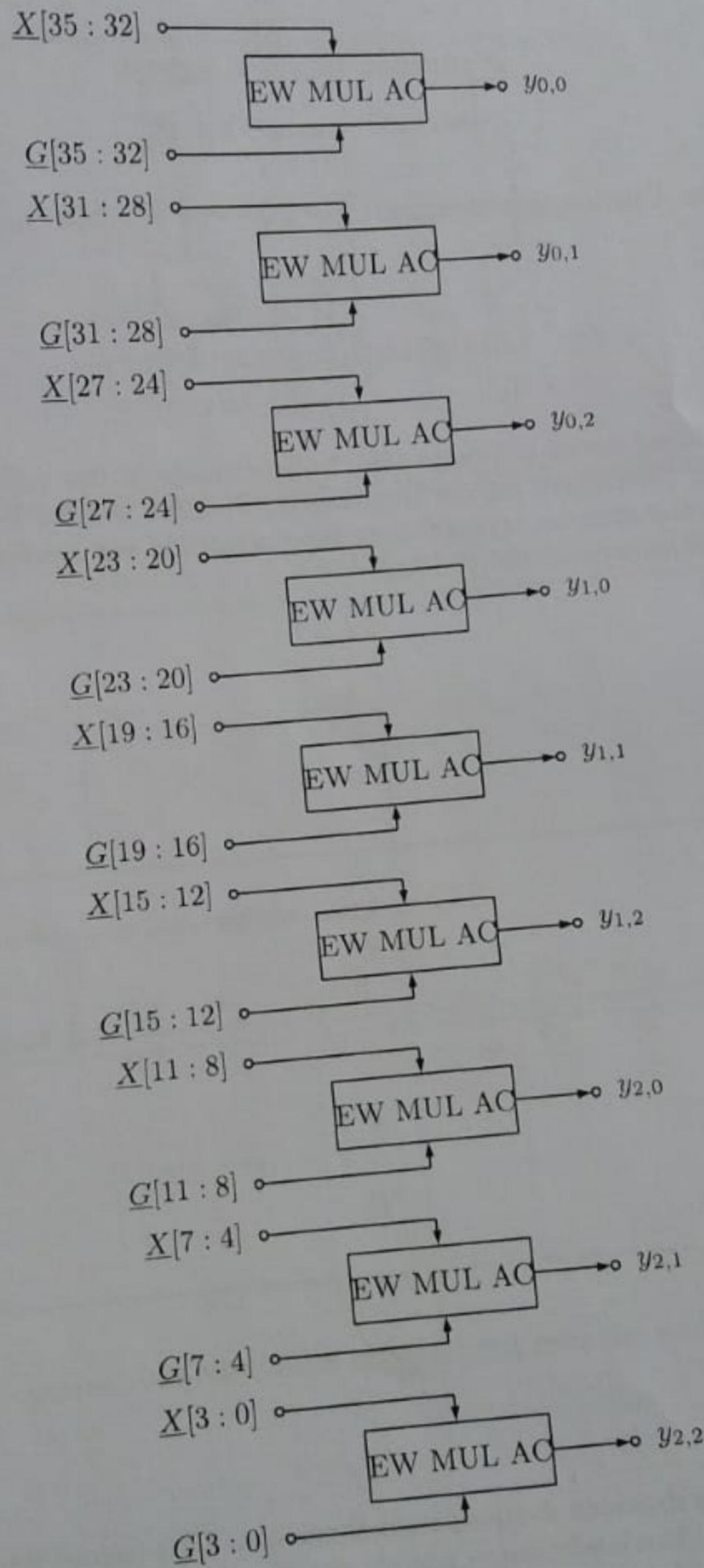
$$\underline{G}[n] = \begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & g_{2,0} & g_{2,1} & g_{2,2} \\ g_{0,-1} & g_{0,0} & g_{0,1} & g_{1,-1} & g_{1,0} & g_{1,1} & g_{2,-1} & g_{2,0} & g_{2,1} \\ g_{-1,0} & g_{-1,1} & g_{-1,2} & g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{-1,-1} & g_{-1,0} & g_{-1,1} & g_{0,-1} & g_{0,0} & g_{0,1} & g_{1,-1} & g_{1,0} & g_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y}[n] = [y_{0,0} \quad y_{0,1} \quad y_{0,2} \quad y_{1,0} \quad y_{1,1} \quad y_{1,2} \quad y_{2,0} \quad y_{2,1} \quad y_{2,2}]$$



# Modellbasierter Entwurf

$$\underline{X}[n] = \begin{bmatrix} x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \\ x_{0,0} \\ x_{0,1} \\ x_{1,0} \\ x_{1,1} \end{bmatrix}; \quad \underline{G}[n] = \begin{bmatrix} g_{0,0} \\ g_{0,-1} \\ g_{-1,0} \\ g_{-1,-1} \\ g_{0,1} \\ g_{0,0} \\ g_{-1,1} \\ g_{-1,0} \\ g_{0,2} \\ g_{0,1} \\ g_{-1,2} \\ g_{-1,1} \\ g_{1,0} \\ g_{1,-1} \\ g_{0,0} \\ g_{0,-1} \\ g_{1,1} \\ g_{1,0} \\ g_{0,1} \\ g_{0,0} \\ g_{1,2} \\ g_{1,1} \\ g_{0,2} \\ g_{0,1} \\ g_{2,0} \\ g_{2,-1} \\ g_{1,0} \\ g_{1,-1} \\ g_{2,1} \\ g_{2,0} \\ g_{1,1} \\ g_{1,0} \\ g_{2,2} \\ g_{2,1} \\ g_{1,2} \\ g_{1,1} \end{bmatrix}; \quad \underline{Y}[n] = \begin{bmatrix} y_{0,0} \\ y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ y_{1,0} \\ y_{1,1} \\ y_{1,2} \\ y_{2,0} \\ y_{2,1} \\ y_{2,2} \end{bmatrix}$$



## Aufgabe 3 Modellbildung eines diskreten Systems höherer Ordnung

a) Berechnen sie die Übertragungsfunktion  $G(z)$  für die folgenden Pol- und Nullstellen [5 Pkt.]:

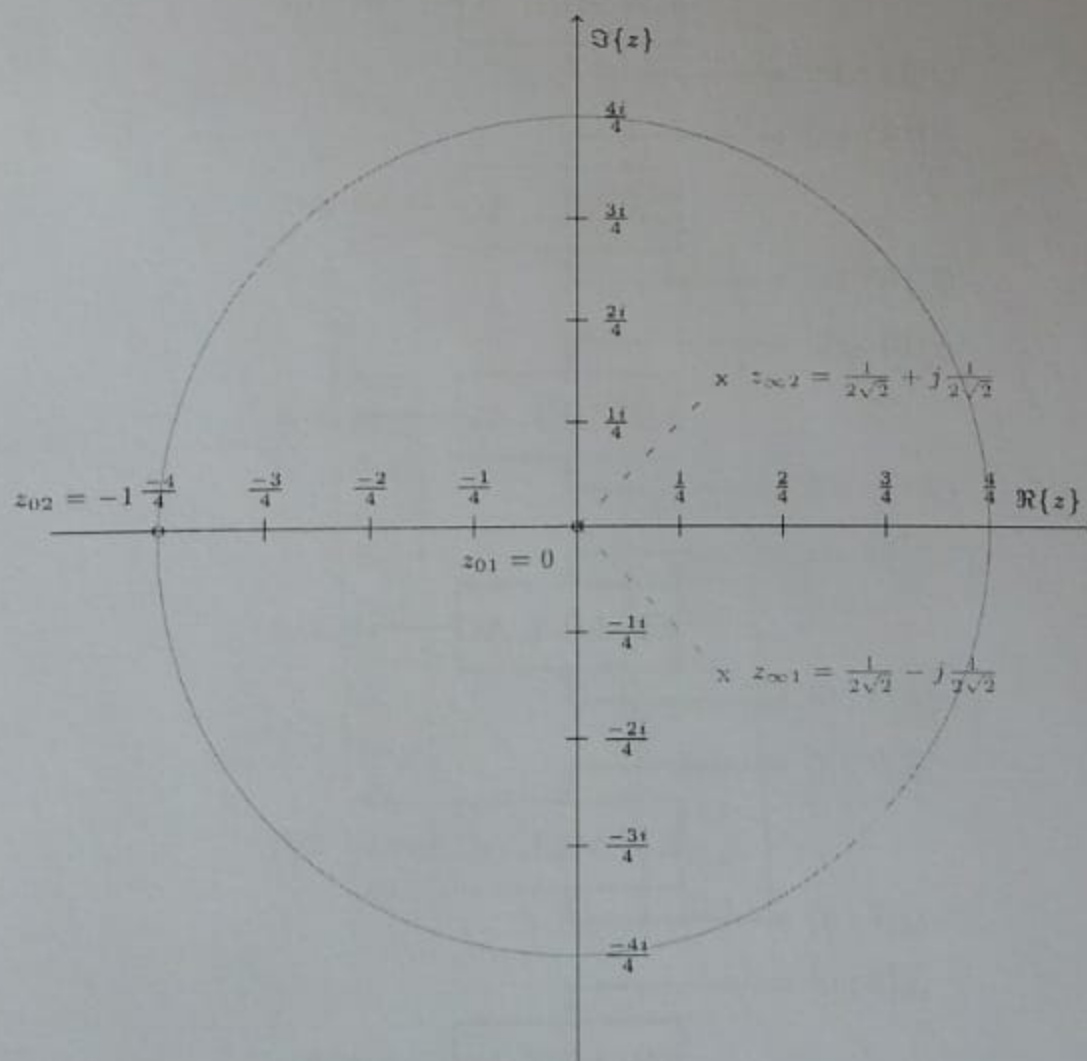
Nullstellen:  $z_{01} = c, z_{02} = d;$

Polstellen:  $z_{\infty 1/2} = a \pm jb;$

**Hinweis:** Produktform der Übertragungsfunktion:

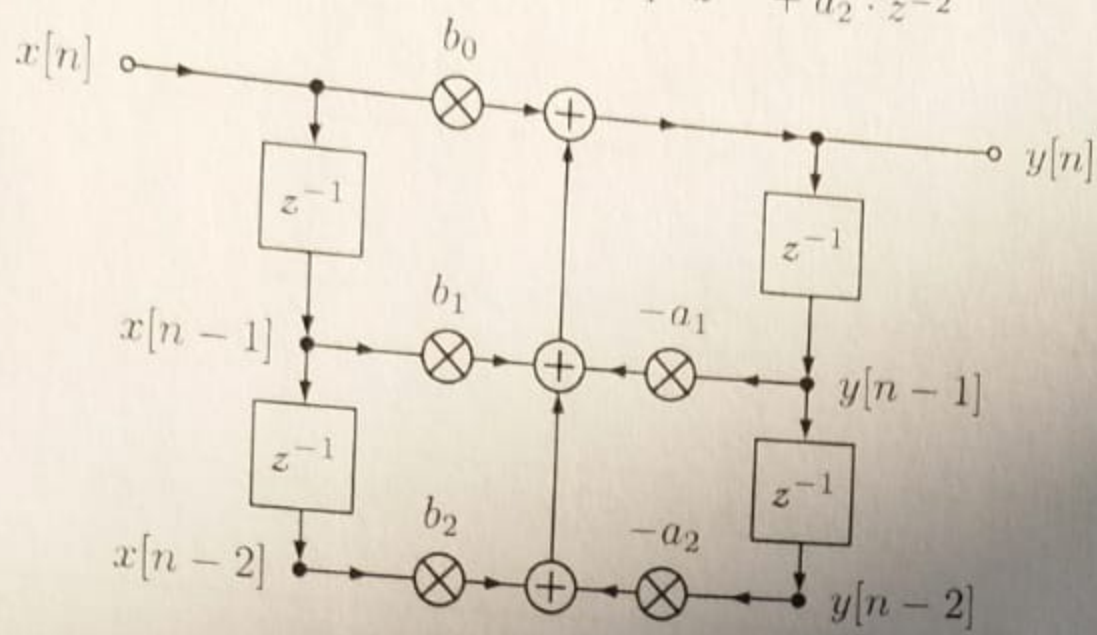
$$G(z) = G_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_{0k} \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - z_{\infty k} \cdot z^{-1})}$$

b) Geben ist die in der Abbildung unten definierte Pol-/Nullstellenlage in der  $z$ -Ebene. Für den statischen Fall sei  $G(z \rightarrow 1) = 3$  definiert. Überführen Sie die Übertragungsfunktion aus der  $z$ -Ebene in den diskreten Zeitbereich. Geben Sie die Koeffizienten im vorgegebenen Blockschaltbild zur Realisierung an. Begrenzen Sie die Zahlendarstellung auf 5 Nachkommastellen. [10 Pkt.]



c) Zur Zahlendarstellung innerhalb des digitalen Systems steht Ihnen eine Q2.2 (signed fixpoint) Fixpunktdarstellung zur Verfügung. Passen Sie die Filterkoeffizienten gemäß der Vorschrift  $N_2 = \lfloor N_{10} \rfloor$  an. Berechnen Sie mit Hilfe der rekursiven Funktion im Zeitbereich die Impulsantwort des Systems mit  $x[0] = 5/4$  und  $y[0] = 0$ . Welcher Fehler pro Zeitschritt entsteht zwischen analytischer Lösung und auf das Q2.2 Fixpunktformat begrenzten Impulsantwort? Nutzen Sie dazu die gegebenen Tabellen. [5 Pkt.]

Hinweis:  $G(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$



- analytische Berechnung der rekursiven Impulsantwort (auf 5 Nachkommastellen)

$n$	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n]$
0		0	0	0	0	
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

- Berechnung der rekursiven Impulsantwort im Format Q2.2

$n$	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n]$
0		0	0	0	0	
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

Hinweis: Achten Sie darauf, dass alle Zahlen entsprechend gerundet sind!

## Modellbasierter Entwurf

LIN

Lösung:

a)

$$z_{01} = c, z_{02} = d$$

$$z_{\infty 1/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \pm j \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = a \pm jb$$

$$\begin{aligned} G(z) &= G_0 \cdot \frac{(1 - c \cdot z^{-1}) \cdot (1 - d \cdot z^{-1})}{[1 - (a + jb) \cdot z^{-1}] \cdot [1 - (a - jb) \cdot z^{-1}]} \\ &= G_0 \cdot \frac{(1 - c \cdot z^{-1}) \cdot (1 - d \cdot z^{-1})}{(1 - a \cdot z^{-1} - jb \cdot z^{-1}) \cdot (1 - a \cdot z^{-1} + jb \cdot z^{-1})} \cdot \frac{z}{z} \\ &= G_0 \cdot \frac{(z - c) \cdot (z - d)}{(z - a - jb) \cdot (z - a + jb)} \\ &= G_0 \cdot \frac{z^2 - c \cdot z - d \cdot z + cd}{z^2 - a \cdot z + jb \cdot z - a \cdot z + a^2 - jab - jb \cdot z + jab + b^2} \\ &= G_0 \cdot \frac{z^2 - (c + d) \cdot z + cd}{z^2 - 2a \cdot z + a^2 + b^2} \end{aligned}$$

b)

$$z_{01} = 0, z_{02} = -1$$

$$z_{\infty 1/2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \pm j \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow a = b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

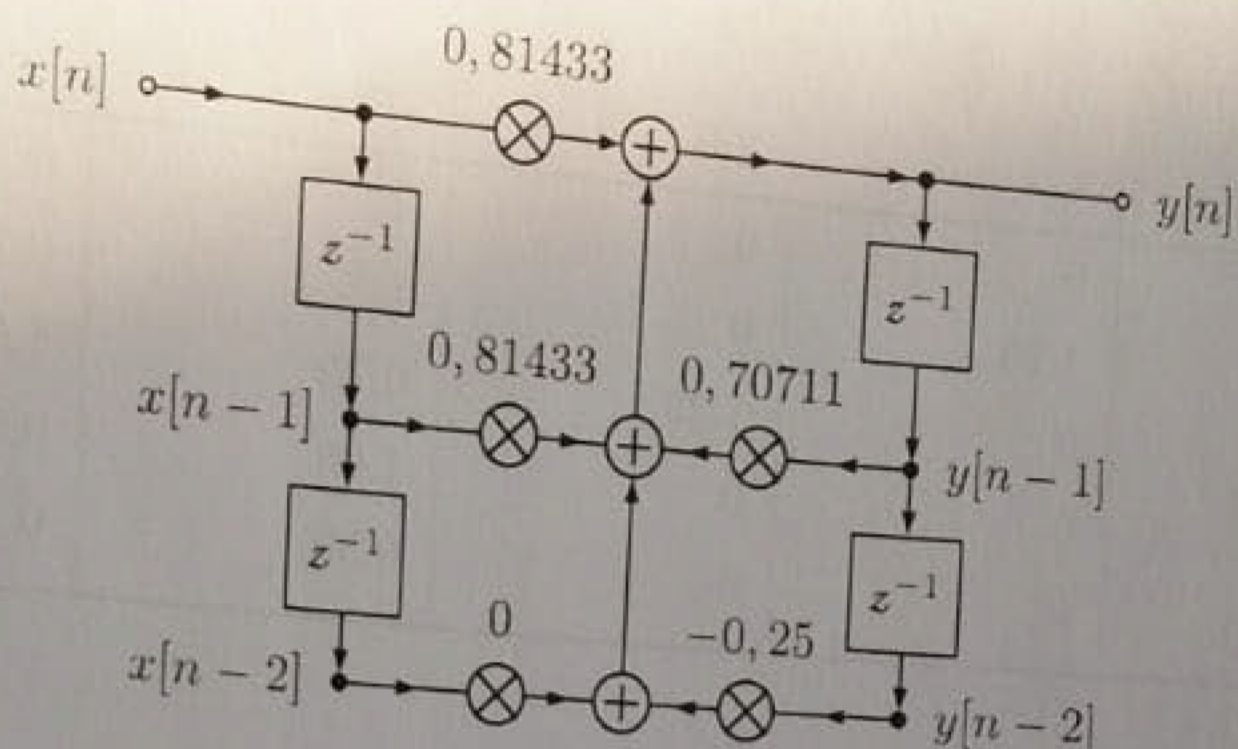
$$\begin{aligned} G(z) &= G_0 \cdot \frac{(z - 0) \cdot (z + 1)}{z^2 - 2a \cdot z + 2a^2} \\ &= G_0 \cdot \frac{z^2 + z}{z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ G_0 \cdot \frac{(z^2 + z)}{z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z + \frac{1}{4}} \right] = 3$$

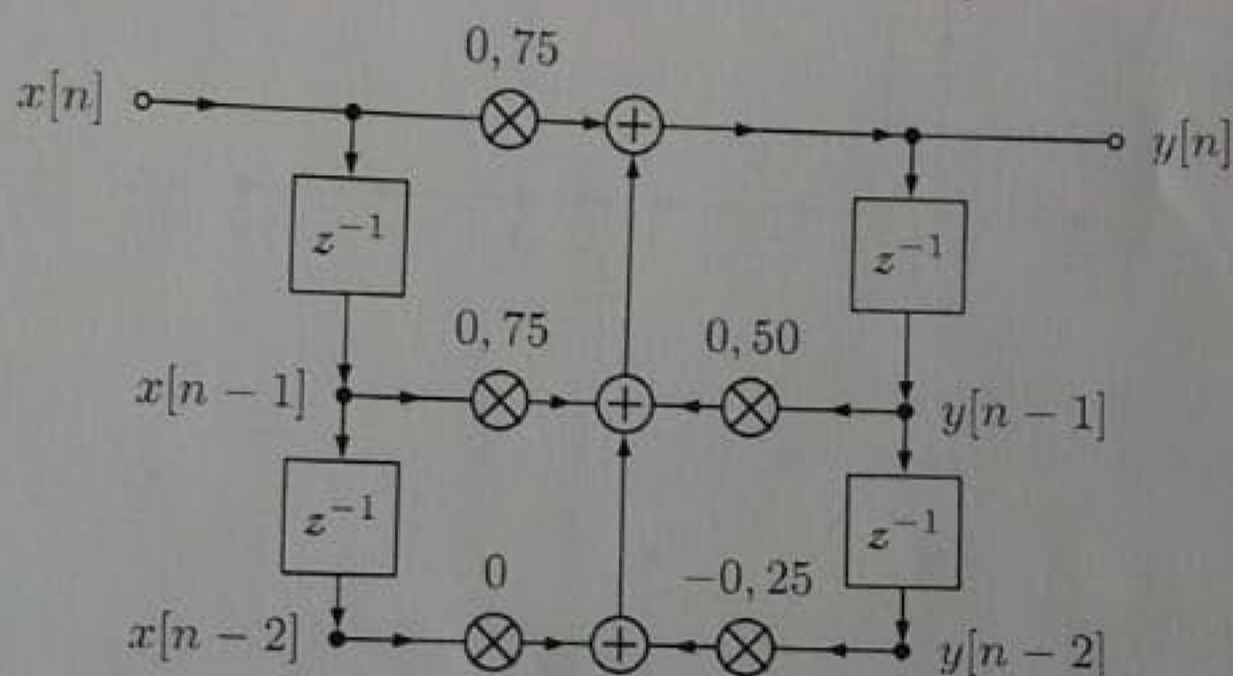
$$G_0 \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}} = 3$$

$$\Leftrightarrow G_0 = 0,81433$$

$$\Leftrightarrow G(z) = 0,81433 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z^{-1} + \frac{1}{4} \cdot z^{-2}}$$



c) Q2.2: Zahlenraum  $N_b = [\{-2\}_1 0 = \{10.00\}_2 \dots \{1.75\}_1 0 = \{01.11\}_2]$



$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0,75 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,70 \cdot z^{-1} + 0,25 \cdot z^{-2}}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) \cdot (z^{-2} - 0,5 \cdot z^{-1} + 0,25) = 0,75 \cdot X(z) \cdot (1 + z^{-1})$$

$$Y(z) \cdot z^{-2} - Y(z) \cdot 0,50 \cdot z^{-1} + Y(z) \cdot 0,25 = 0,75 \cdot X(z) + 0,75 \cdot X(z) \cdot z^{-1}$$

$$Y(z) = 0,75 \cdot X(z) + 0,75 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 0,50 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} - 0,25 \cdot Y(z) \cdot z^{-2}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} \Leftrightarrow y[n] = 0,75 + 0,75 \cdot x[n-1] + 0,50 \cdot y[n-1] - 0,25 \cdot y[n-2]$$

- analytische Berechnung der rekursiven Impulsantwort

$n$	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n]$
0	5/4	0	0	0	0	1,01791
1	0	5/4	0	0	1,01791	1,73768
2	0	0	5/4	1,01791	1,73768	0,97425
3	0	0	0	1,73768	0,97425	0,25448
4	0	0	0	0,97425	0,25448	-0,06361

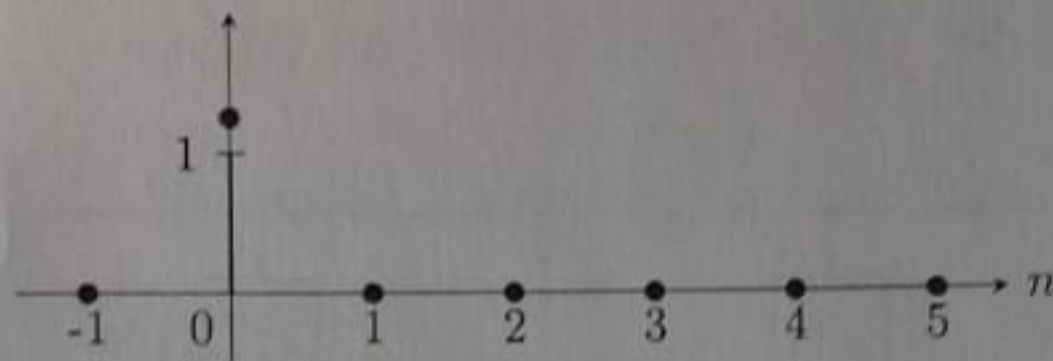
- Berechnung der rekursiven Impulsantwort im Format Q2.2



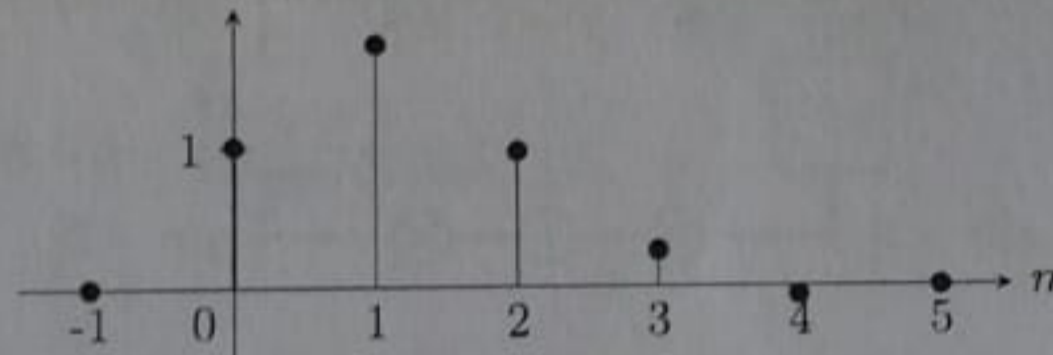
# Modellbasierter Entwurf

$n$	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n]$
0	1,25	0	0	0	0	0,75
1	0	1,25	0	0	0,75	1,00
2	0	0	1,25	0,75	1,00	0,50
3	0	0	0	1,00	0,50	0
4	0	0	0	0,50	0	0

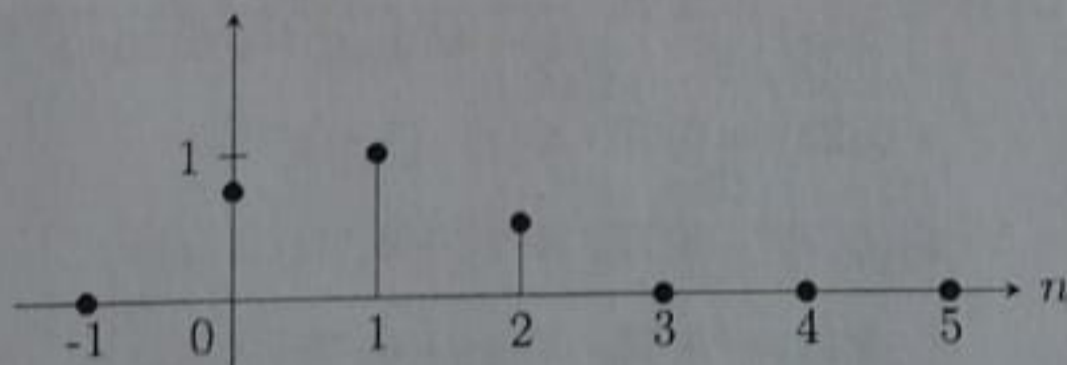
$$x[n] = 1,25 \cdot \delta[n]$$



$$y_{ana}[n]$$



$$y_{dig}[n]$$



$$\epsilon[n] = y_{ana}[n] - y_{dig}[n]$$

