Modellbasierter Entwurf

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Unterschrift	**Tag der Prüfung:** 31. Januar 2019

Bitte beachten!

1. Prüfen Sie, ob Ihre Klausur vollständig ist. Sie muss aus den durchnummerierten Seiten von 1 bis 5 bestehen. Nehmen Sie die Klausur bitte nicht auseinander. Falls Sie ein unvollständiges Exemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte eine einwandfreie Klausur aushändigen.
2. Zum Bestehen der Klausur sind 50% der Punktzahl - Summe der Punkte aus der Laborübung plus erreichte Punkte der Klausur - erforderlich.
3. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
4. Außer einfachen (nicht programmierbaren) Taschenrechnern sind keine Hilfsmittel zugelassen.
5. Das Betreiben von Mobiltelefonen und Computern ist im Prüfungsraum nicht erlaubt.
6. Schreiben Sie bitte gut leserlich und nicht mit Bleistift. Ihre Klausur wird ansonsten nicht gewertet. Lassen Sie einen Korrekturrand von mindestens 4 cm frei.
7. Mit der Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie prüfungsfähig sind und zu Beginn der Klausur die vollständigen Unterlagen erhalten haben.

Anmerkung: Maximale Punktzahl= 120 Punkte, 100% = 100 Punkte

(Punkte/Note: 95/1,0; 90/1,3; 85/1,7; 80/2,0; 75/2,3; 70/2,7; 65/3,0; 60/3,3; 55/3,7; 50/4.0)

Aufgabe	1	2	3	Projekt	Summe		
erreichbare Punkte	20	20	20	60	120		
erreichte Punkte						Note:	

Ort und Datum:

Unterschrift:

Punkte
20

Aufgabe 1 Numerische Differentiation

Gegeben ist folgende Gleichung:

$$f(x) = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{3}{5}x^2$$

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion analytisch. [5 Pkt.]

b) Bestimmen Sie die Vorwärts-Differenzen-Quotienten erster Ordnung im Intervall $I = [-4 : 4]$ im äquidistanten Abstand $h = 1$ (Die Rechnungen sind auf drei Nachkommastellen durchzuführen). [5 Pkt.]

c) Bestimmen Sie die Fehlergröße der Differenzen-Quotienten zur analytischen Lösung mit $\epsilon = \dot{f}(x) - D_{f+,x_i}$. [5 Pkt.]

d) Bestimmen Sie die symmetrischen Differenzen-Quotienten zweiter Ordnung im Intervall $I = [-4 : 4]$ im äquidistanten Abstand $h = 1$. [5 Pkt.]

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die gegebene Tabelle ein.

x	$f(x)$	D_{f+,x_i}	$\dot{f}(x)$	ϵ	D^2_{f,x_i}
-4					
-3					
-2					
-1					
0					
1					
2					
3					
4					

Punkte **20**

Aufgabe 2 2D-Faltung

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}; \quad \underline{G}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \underline{G}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie folgende Rechnungen durch:

$$\underline{Y}_1 = \underline{S} * \underline{G}_1 \quad [2.5\text{ Pkt.}]$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{S} * \underline{G}_2 \quad [2.5\text{ Pkt.}]$$

$$\underline{Y} = \sqrt{\underline{Y}_1^2 + \underline{Y}_2^2} \quad [5\text{ Pkt.}]$$

Hinweis: Die Quadratur als auch das Radizieren sind elementweise durchzuführen! Tragen Sie ihre Ergebnisse unten ein.

$$\underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad \underline{Y}_1^2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad \underline{Y}_2^2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

$$\underline{Y}^2 = \underline{Y}_1^2 + \underline{Y}_2^2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{0,5} = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$$

b) Entwickeln Sie eine Topologie zur technischen Umsetzung der 2D-Faltung auf einem FPGA. Die Berechnung des Ergebnisvektors muss parallel erfolgen. Ihre Lösung darf keine Rekursion enthalten! Nutzen Sie zur Herleitung folgenden Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x[0,0] & x[0,1] \\ x[1,0] & x[1,1] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} g[-1,-1] & g[-1,0] & g[-1,1] & g[-1,2] \\ g[0,-1] & g[0,0] & g[0,1] & g[0,2] \\ g[1,-1] & g[1,0] & g[1,1] & g[1,2] \\ g[2,-1] & g[2,0] & g[2,1] & g[2,2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y[0,0] & y[0,1] & y[0,2] \\ y[1,0] & y[1,1] & y[1,2] \\ y[2,0] & y[2,1] & y[2,2] \end{pmatrix}$$

Begründen Sie ihre Lösung formal (Gleichungssystem angeben)! [10 Pkt.]

Punkte 20

Aufgabe 3 Modellbildung eines diskreten Systems höherer Ordnung

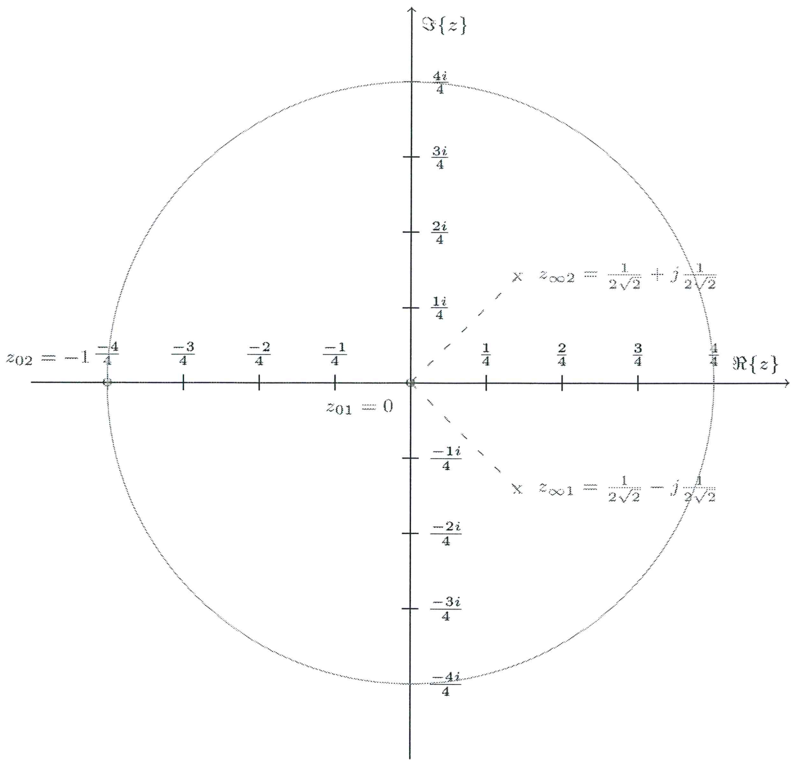
a) Berechnen sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ für die folgenden Pol- und Nullstellen [5 Pkt.]:

$$\text{Nullstellen:} \quad z_{01} = c, \;\; z_{02} = d;$$
$$\text{Polstellen:} \quad z_{\infty 1/2} = a \pm \jmath b;$$

Hinweis: Produktform der Übertragungsfunktion:

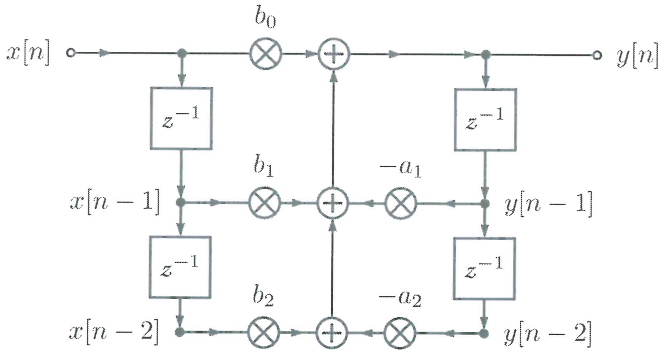
$$G(z) = G_0 \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{M} (1 - z_{0k} \cdot z^{-1})}{\prod\limits_{k=1}^{N} (1 - z_{\infty k} \cdot z^{-1})}$$

b) Geben ist die in der Abbildung unten definierte Pol-/Nullstellenlage in der z-Ebene. Für den statischen Fall sei $G(z \to 1) = 3$ definiert. Überführen Sie die Übertragungsfunktion aus der z-Ebene in den diskreten Zeitbereich. Geben Sie die Koeffizienten im vorgegebenen Blockschaltbild zur Realisierung an. Begrenzen Sie die Zahlendarstellung auf 5 Nachkommastellen. [10 Pkt.]



c) Zur Zahlendarstellung innerhalb des digitalen Systems steht Ihnen eine Q2.2 (signed fixpoint) Fixpunktdarstellung zur Verfügung. Passen Sie die Filterkoeffizienten gemäß der Forschrift $N_2 = \lfloor N_{10} \rfloor$ an. Berechnen Sie mit Hilfe der rekursiven Funktion im Zeitbereich die Impulsantwort des Systems mit $x[0] = 5/4$ und $y[0] = 0$. Welcher Fehler pro Zeitschritt entsteht zwischen analytischer Lösung und auf das Q2.2 Fixpunktformat begrenzten Impulsantwort? Nutzen Sie dazu die gegebenen Tabellen. [5 Pkt.]

Hinweis: $G(z) = \dfrac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$



- analytische Berechnung der rekursiven Impulsantwort (auf 5 Nachkommastellen)

n	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n]$
0	4/3	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

- Berechnung der rekursiven Impulsantwort im Format Q2.2

n	$x[n]$	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n]$
0		0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

Hinweis: Achten Sie darauf, dass alle Zahlen entsprechend gerundet sind!