Modellbasierter Entwurf

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Unterschrift	**Tag der Prüfung:** 11. Feb. 2021 „online“

Bitte beachten!

1. Prüfen Sie, ob Ihre Klausur vollständig ist. Sie muss aus den durchnummerierten Seiten von 1 bis 14 bestehen. Nehmen Sie die Klausur bitte nicht auseinander. Falls Sie ein unvollständiges Exemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte eine einwandfreie Klausur aushändigen.
2. Zum Bestehen der Klausur sind 50% der Punktzahl - Summe der Punkte aus der Laborübung plus erreichte Punkte der Klausur - erforderlich.
3. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
4. Außer einfachen (nicht programmierbaren) Taschenrechnern sind keine Hilfsmittel zugelassen.
5. Das Betreiben von Mobiltelefonen und Computern ist im Prüfungsraum nicht erlaubt.
6. Schreiben Sie bitte gut leserlich und nicht mit Bleistift. Ihre Klausur wird ansonsten nicht gewertet. Lassen Sie einen Korrekturrand von mindestens 4 cm frei.
7. Mit der Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie prüfungsfähig sind und zu Beginn der Klausur die vollständigen Unterlagen erhalten haben.

Anmerkung: Maximale Punktzahl= 120 Punkte, 100% = 100 Punkte

(Punkte/Note: 95/1,0; 90/1,3; 85/1,7; 80/2,0; 75/2,3; 70/2,7; 65/3,0; 60/3,3; 55/3,7; 50/4.0)

Aufgabe	1	2	3	4	Projekt	Summe	Note:
erreichbare Punkte	15	15	15	15	60	120	
erreichte Punkte							

Ort und Datum: Unterschrift:

Punkte **15**

Aufgabe 1 Numerische Differentiation

Gegeben ist folgende Gleichung:

$$f(x) = \frac{2}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{5} x^3$$

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ analytisch. [5 Pkt.]

b) Bestimmen Sie den Vorwärts-Differenzen-Quotienten erster Ordnung im Intervall $I = [-2 : 2]$ im äquidistanten Abstand $h = 0.5$ (die Rechnungen sind auf drei Nachkommastellen durchzuführen). [5 Pkt.]

c) Bestimmen Sie die Fehlergröße des Differenzen-Quotienten zur analytischen Lösung mit $\epsilon = \dot{f}(x) - D_{f+,x_i}$. [2.5 Pkt.]

d) Bestimmen Sie den symmetrischen Differenzen-Quotienten zweiter Ordnung D''_{f,x_i} im Intervall $I = [-2 : 2]$ im äquidistanten Abstand von $h = 0.5$. [2.5 Pkt.]

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die gegebene Tabelle ein.

x	$f(x)$	D_{f+,x_i}	$\dot{f}(x)$	ϵ	D''_{f,x_i}
-2					
-1.5					
-1					
-0.5					
0					
0.5					
1					
1.5					
2					

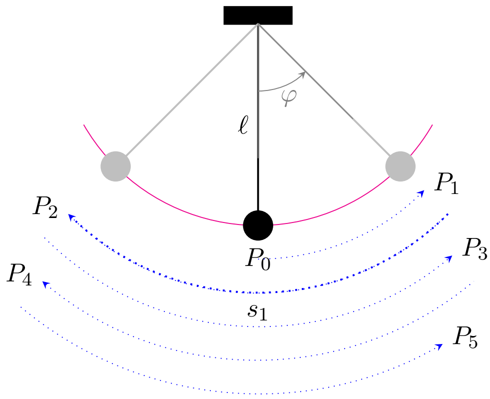
Aufgabe 2 Wegstrecke eines Pendelkörpers

Punkte **15**

Zur Modellbildung sind die unendlichen geometrischen Reihen ein wichtige Methode in den Ingenieurwissenschaften. Diese werden als Näherungsformeln, insbesondere in der Rechentechnik oder allgemeiner in der Informatik, angewendet. Ein unendliche geometrische Reihe hat die allgemeine Form:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} s_1 \cdot q^{i-1} = s_1 \cdot q^0 + s_1 \cdot q^1 + s_1 \cdot q^2 + \ldots + s_1 \cdot q^{n-1} + \ldots$$

Dabei ist $s_i = s_1 \cdot q^{i-1} = s_1 \cdot q^0 + s_1 \cdot q^1 + \ldots + s_1 \cdot q^{n-1} + \ldots$ eine geometrische Zahlenfolge mit dem Startwert s_1.



Ein physikalisches Pendel führt unter dem Einfluß von Reibungskräften eine gedämpfte Schwingung durch. Die Pendelbewegung startet im Punkt P_1. Der Pendel legt in der ersten Halbschwingung von P_1 nach P_2 die Bogenlänge s_1 als Wegstrecke zurück. In der zweiten Halbschwingung von P_2 nach P_3 die Bogenlänge $s_2 = 0,96 \cdot s_1$. In der dritten Halbschwingung von P_3 nach P_4 beträgt die Wegstrecke $s_3 = 0,96 \cdot s_2$. Es wird davon ausgegangen, daß im Gegensatz zu einem realen Pendel die Schwingung nicht zur Ruhe kommt.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Grenzwert für die n-te Summe. Geben Sie die verallgemeinerte Formel für die konvergente Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} s_1 \cdot q^{i-1}$$

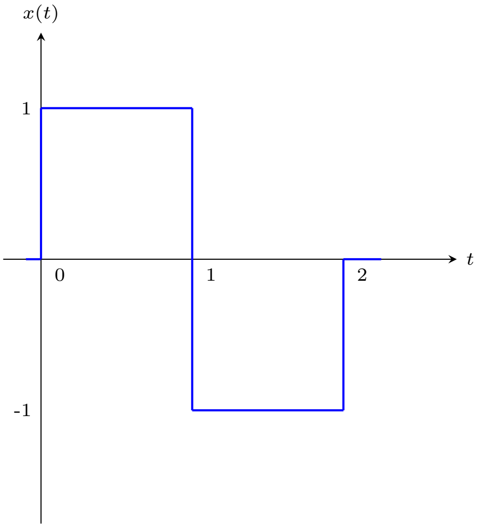
an. [10 Pkt.]

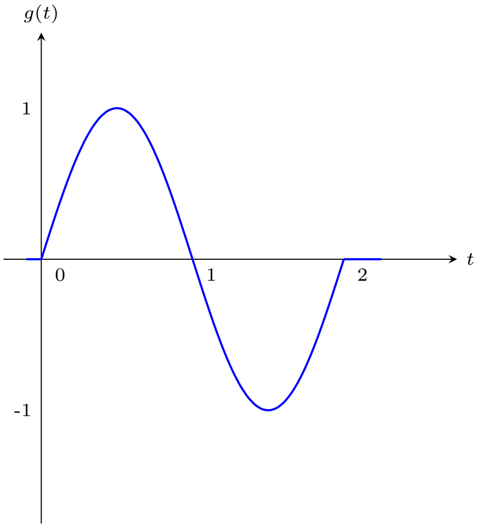
b) Der Ausleckungswinkel für den Punkt P_1 beträgt $\varphi = \pi/4$. Die Fadenlänge ist mit $\ell = 0.75\ m$ gegeben. Berechnen Sie den Gesamtweg s des Pendels. [5 Pkt.]

Aufgabe 3 Kreuzkorrelationskoeffizient

Punkte
15

Gegeben sind folgende Funktionen:





Bestimmen Sie die Kreuzkorrelationskoeffizient r_{xg} der beiden Signale.

Hinweis:

$$
\begin{aligned}
r_{xg}(\tau = 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot g(t + \tau)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot g(t)\ \mathrm{d}t = r_{xg}
\end{aligned}
$$

Punkte
15

Aufgabe 4 2D-Faltung und numerische Differentiation

Gegeben ist der eindimensionale, symmetrische Differenzenquotient 2. Ordnung

$$\begin{aligned} D''_{f,x_i} &= \frac{f(x_{i+h}) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_{i-h})}{(x_{i+h} - x_i)^2} \\ &= \frac{f(x_{i+h}) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_{i-h})}{h^2} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie für den Differenzenquotient 2. Ordnung die horizontale als auch die vertikale Maske in Form von Matrizen zur Berechnung von $\underline{F}''_x, \underline{F}''_y$ bzw. $\underline{F}''_{x,y}$ für eine diskrete, zweidimensionale Matrize $\underline{F}_{xy}$. Annahme: $h = 1$. [5 Pkt.]

$$\underline{D}''_x = \frac{1}{\sum |d[m,n]|} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{D}''_y = \frac{1}{\sum |d[m,n]|} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$D''_{xy} = \frac{1}{\sum |\dots|} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Gradienten in x- und y-Richtung mittels Faltung. [10 Pkt.]
Gegeben ist folgende Matrize:

$$\underline{F}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}''_x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \underbrace{\frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\underline{D}''_x} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}''_y = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} * \underbrace{\frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}_{\underline{D}''_y} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$