Dr. Yury Luchko
TFH Berlin / FB II

Klausur „Computational Engineering/Embedded Systems"
(SS 2006, 28.07.2006)

Vorname: ______________________

Name: ______________________

Geburtsdatum: ______________________

Geburtsort: Berlin

Matr.-Nr.: ______________________

Wichtige Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.
- Die bei den Aufgaben angegebenen Punktzahlen entsprechen ungefähr der Zeit (in Minuten), die Sie maximal zur Bearbeitung der Aufgaben verwenden sollten.
- Schreiben Sie Ihre Antworten in den nach den Aufgabestellungen dafür vorgesehenen Zeilen bzw. Boxen auf.
- Alle Berechnungen sollten mit MATLAB durchgeführt werden.
- Die Klausur darf nicht auseinander geheftet werden.
- Täuschungsmanöver führen zum sofortigen Ausschluss von der Klausur!

Ich habe die Hinweise zur Kenntnis genommen:

____
(Unterschrift)

Aufgabe	erreichbare Punkte	erreichte Punkte
1	14	10
2	18	16
3	22	22
4	30	21
5	16	16
6	20	16
gesamt	**120**	101

2,0

1. Aufgabe: Vor 20 Jahren kaufte ein Immobilienhändler ein Mehrfamilienhaus in New York zu sehr günstigen Konditionen, und zwar zum Preis von 50.000 $. Bestimmen Sie, was die Immobilie bei einem jährlichen Wertgewinn von **q%** in **n** Jahren wert ist.

a) Stellen Sie ein mathematisches Modell für die Beschreibung des Immobilienwertes im Laufe der Jahre auf **(8 Punkte):** 6

$T_{i+1} = a \cdot T_i + b$

Was ist T_i ?

$T_0 = ?$

$T_{i+1} = T_i + T_i * 0{,}01 * q$

$T_{i+1} = T_i(1 + 0{,}01 \cdot q)$

$a = 1 + 0{,}01 \cdot q$

$b = 0$

b) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm für die Berechnung des Immobilienwertes **(4 Punkte):** 4

```
function W = wertgewinn_pa (NW, qpa, n)
T(1) = NW;
t(1) = 0;
a = 1+ 0,01·qpa;
for i= 1:n+1
    T(i+1) = a * T(i);
end
RW = T(n+1)
```

Bsp. der Anwendung

```
KW = 50.000;
n = 20;
q = 10;
akt.Wert = wertgewinn (KW, q, n)
```

c) Berechnen Sie mit dem Programm aus b) den heutigen Immobilienwert (mit 2 Nachkommastellen) bei einem jährlichen Wertgewinn von 10% **(1 Punkt):** 0

60788 $

d) Berechnen Sie mit dem Programm aus b) den Immobilienwert (mit 2 Nachkommastellen) nach 30 Jahren ab Kaufdatum bei einem jährlichen Wertgewinn von 7% **(1 Punkt):** 0

56684 $

2. Aufgabe: Der Effektivwert einer Wechselspannung *U(t)* der Dauer *T* ist allgemein definiert als

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt}\ .$$

a) Berechnen Sie mit MATLAB den genauen (symbolischen) Wert des Effektivwertes der Wechselspannung $U(t) = a \cdot \sin(\pi \cdot t)$ der Dauer T, wobei a und T symbolische Konstanten sind.

a1) MATLAB-Anweisungen **(8 Punkte):** 8

```
syms U T t a
Uf= a*sin(pi*t)

U =subs(U,Uf)
Ueff = sqrt(1/T*int(U^2,t,0,T)
```

a2) Antwort **(2 Punkte):** 2

$U_{eff} =$

$\frac{1}{2}*\sqrt{\frac{1}{\pi}*\left(-\frac{2}{T}*a^2*\cos(\pi*T)*\sin(\pi*T)-\pi*T\right)}$

b) Berechnen Sie den genauen (symbolischen) Wert des Effektivwertes der Wechselspannung $U(t) = a \cdot \sin(\pi \cdot t)$ der Dauer *T=4* wenn *a=2* ist. Vereinfachen Sie die Antwort zu der einfachsten und kürzesten Form.

b1) MATLAB-Anweisungen **(6 Punkte):** 5

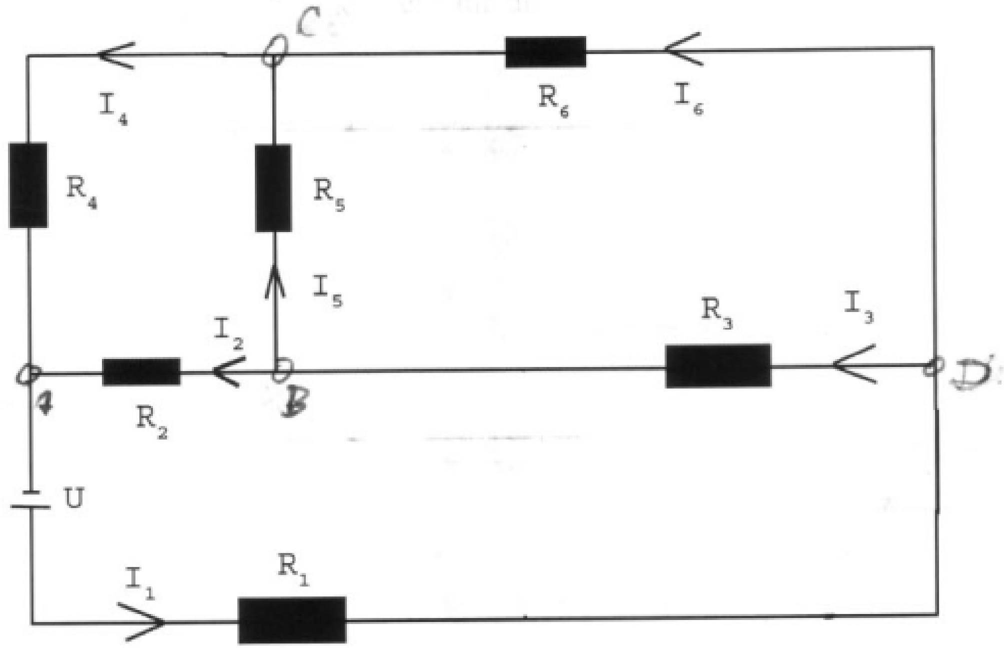
```
% Code aus a1)

Ueff = subs(U_eff,{a,T},{2,4})        a=sym('2')
Ueff = simple(Ueff)                    T=sym('4')
```

b2) Antwort **(2 Punkte):** 1

$= \sqrt{2}$

$U_{eff} =$ 1,4142

3. Aufgabe: Berechnen Sie die Stromstärken $I_1, \ldots, I_6$, wenn an den Stromkreis (s. Abbildung) mit den Widerständen $R_1 = 3$ Ohm, $R_2 = 2$ Ohm, $R_3 = 1$ Ohm, $R_4 = 2$ Ohm, $R_5 = 3$ Ohm, $R_6 = 1$ Ohm die Spannung U = 9 V angelegt wird.



a) Wie lautet das lineare Gleichungssystem für die unbekannten Stromstärken $I_1, \ldots, I_6$, das mithilfe des Ohm'schen Gesetzes und zwei Kirchhoff'schen Regeln aufgestellt wird **(14 Punkte)?** 14

Knotengleichungen

A: $-I_1 + I_2 + I_4 = 0$

B: $-I_2 + I_3 - I_5 = 0$

C: $-I_4 + I_5 + I_6 = 0$

[D: $I_1 - I_3 - I_6 = 0$]

Maschengleichungen

ABC: $-R_2 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 = 0$

ADB: $R_1 I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = U$

DBC: $R_3 \cdot I_3 + R_5 \cdot I_5 - R_6 \cdot I_6 = 0$

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -R2 & 0 & R4 & R5 & 0 \\ R1 & R2 & R3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R3 & 0 & R5 & -R6 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem aus a) mit MATLAB.

b1) MATLAB-Anweisungen **(6 Punkte):** 6

```
A = [-1 1 0 1 0 0
     0 -1 1 0 -1 0
     0 0 0 -1 1 1
     0 -R2 0 R4 R5 0
     R1 R2 R3 0 0 0
     0 0 R3 0 R5 -R6]
b = [0 0 0 0 U 0]'
I = A\b
```

2

b2) **Lösung (2 Punkte):**

$I_1 = 2$

$I_2 = 1$

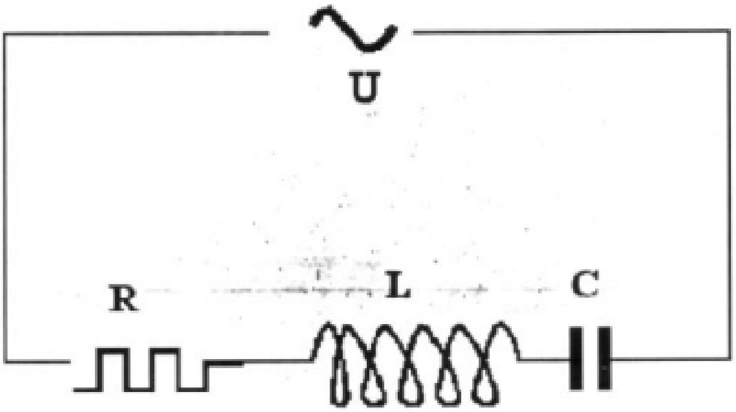
$I_3 = 1$

$I_4 = 1$

$I_5 = 0$

$I_6 = 1$

4. Aufgabe: Ein Generator erzeugt die Spannung *U(t)* in einem geschlossenen CLR-Stromkreis (s. Zeichnung).



Die Ladung *Q(t)* des Kondensators erfüllt nach der Kirchhoffschen Stromkreisregel die Differentialgleichung

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} Q(t) = U(t).$$

a) Finden Sie mit MATLAB die exakte (symbolische) Lösung der Anfangswertaufgabe für die Differentialgleichung für den Fall, dass $U(t) = 10 \cdot \sin(2t)$, L=1, R=0, C=1/4 und der Stromkreis bis $t=0$ in Ruhe war, so dass $Q(0)=0$ und $Q'(0)=0$. Vereinfachen Sie die Antwort zu der möglichst kürzesten Form.

a1) MATLAB-Anweisungen **(5 Punkte):** 4

```
syms u t L C R;
u= 10 * sin(t)
Qt= dsolve('Q = (-L*D2Q - R*DQ + u)/C', 'Q(0)=0', 'DQ(0)=0', 't')
subs(Qt, {C, L, R, u}, {0.25, 1, 0, u})
Qt = simplify(Qt)
```

a2) Antwort **(2 Punkte):** 0

$$Q(t) = -40 \cdot \sin(t) * \cos(t/2) + 40 * \sin(t)$$
$$= 40 \sin(t) \left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

a3) Welchen Wert (mit 2 Nachkommastellen) hat in diesem Fall die Ladung $Q(t)$ des Kondensators zum Zeitpunkt $t=2$ **(2 Punkte)?** 0

$Q(2) =$ 16,72

b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} Q(t) = U(t),$$
$$Q(0) = Q_0, Q'(0) = Q_1$$

im Intervall $0 \le t \le 3$ numerisch mit dem MATLAB-Solver ode45 wenn $L=1$, $R=3$, $C=1/5$, $U(t) = \sin(t) - 2\cos(t)$ und $Q_0 = 10, Q_1 = 2$.

b1) Wie sieht das zu der Anfangswertaufgabe äquivalente System von Differentialgleichungen 1. Ordnung und ihren Anfangsbedingungen aus **(12 Punkte)?** 11

$Q'(t) = Y_2(t)$

$Q' = Y_2$

$Y_2' = \left(\sin(t) - 2\cos(t) - R \cdot Y_2 + \frac{1}{C} \cdot Y_1\right) / L$, mit $L=1$, $R=3$, $C=1/5$

$y_1(t) =$?

b2) MATLAB-Anweisungen für die numerische Lösung der Anfangswertaufgabe aus b) **(7 Punkte):** 6

```
function = num_gl_aufg4b(t,y)
f = [y(2); (sin(t)-2*cos(t)-3*y(2)+1/0.2*y(1))/1];

[tb,yb] = ode45('num_gl_aufg4b',[0;3],[10 2]);
```

b3) Welchen Wert (mit 2 Nachkommastellen) hat in diesem Fall die Ladung $Q(t)$ des Kondensators zum Zeitpunkt $t=3$? Welchen Wert hat die Stromstärke $I(t)$ zum Zeitpunkt $t=3$? Hinweis: Für die Stromstärke $I(t)$ gilt: $I(t)=Q'(t)$ **(2 Punkte).** 0

$Q(3) =$ 343,88 $I(3) =$ 287,92

5. Aufgabe: Ein Landwirt kann höchstens 100 ha Land bepflanzen, und zwar mit Kartoffeln und/oder Getreide. Vor der Ernte fallen Anbaukosten an, und zwar 10 Euro pro ha für Kartoffeln und 20 Euro pro ha für Getreide. Die notwendige Feldarbeit beträgt 1 Arbeitstag pro ha bei Kartoffeln und 4 Arbeitstage pro ha bei Getreide. Der Reingewinn pro ha beläuft sich auf 40 Euro pro ha Kartoffeln und 120 Euro pro ha Getreide. Der Landwirt kann 160 Arbeitstage einsetzen und verfügt über ein Kapital von 1100 Euro. Er will Kartoffeln und Getreide in einem solchen Umfang anbauen, dass der Gewinn möglichst groß wird.

a) Wie lautet die mathematische Formulierung dieses Problems **(9 Punkte)**? 9

x1 - Kartoffeln
x2 - Getreide

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = X$

$D \subset X$
$1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 <= 160$
$10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 <= 1100$
$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 <= 100$
$0 <= x_1,\ 0 <= x_2$

$f(x_1, x_2) = 40 x_1 + 120 x_2 \to \max \iff -f(x_1,x_2) = -40 \cdot x_1 - 120 \cdot x_2 \to \min$

b) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem aus a) mit MATLAB.

b1) MATLAB-Anweisungen **(5 Punkte):** 5

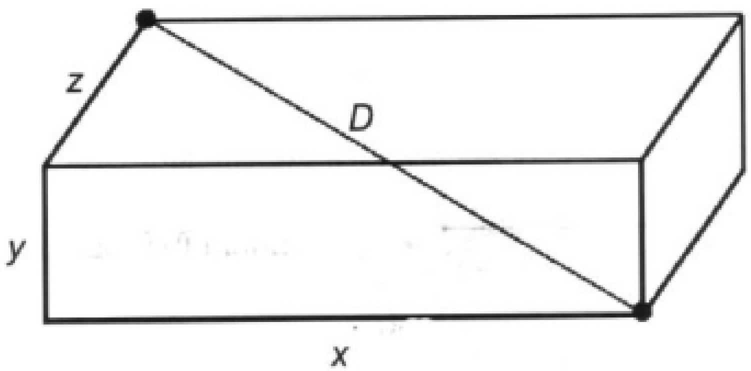
```
f=[-40;-120]
A=[1 4;10 20;1 1]
b=[160;1100;100]
lb=[0;0]
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
fval=-fval
```

b2) Lösung **(2 Punkte):** 2

60 ha Kartoffeln
25 ha Getreide

54000 Reingewinn

6. Aufgabe: Gegeben ist ein Quader mit vorgegebenem Volumen V. Die Länge D der Raumdiagonale soll bei festgehaltenem Volumen ein Minimum werden. Für diesen Fall sollen die Kantenlängen x, y, z sowie die Diagonale D berechnet werden.



a) Wie lautet die mathematische Formulierung dieses Problems **(8 Punkte)?** Hinweis: Um die Zielfunktion zu definieren, verwenden Sie nicht D, sondern das Quadrat davon. 4

$$D^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow \quad D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Zielfkt: $f(x,y,z) = D^2 = x^2+y^2+z^2 \to \min$

Neb. Bed: $x \cdot y \cdot z = V$

$x, y, z \geq 0$

Nebenbedingungen?

b) Lösen Sie das nichtlineare Optimierungsproblem aus a) mit MATLAB wenn $V = 5\,cm^3$.

b1) MATLAB-Anweisungen **(10 Punkte):** 10

```
function [c,ceq] = cond_aufg6(x)
c = [];
ceq = (x(1)*x(2)*x(3) -5);
```

```
function f = func_aufg6(x)
f = x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2;
```

```
lb = zeros(3,1);
x0 = [1 1 1];
[x,fval] = fmincon('func_aufg6',x0,[],[],[],[],lb,[],'cond_aufg6')
D = sqrt(fval)
```

b2) Lösung **(2 Punkte):** 2

$x = y = z = 1{,}71$

$D = 2{,}9618$