Systemtheorie (SYT)	1. Prüfung SS 2024	Blatt 1/3

Name	Vorname	Matr.-Nr.	Datum	Note
			24/07/24	1,0

27.7.24

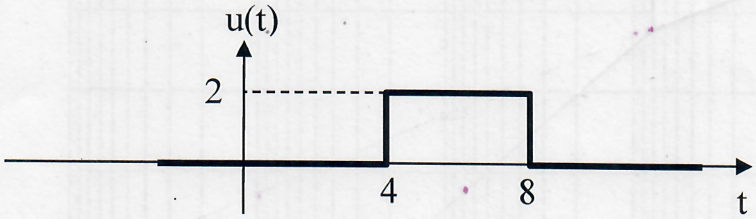
Ist dies Ihr letzter Prüfungsversuch (Bitte ankreuzen)?	Ja	nein

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, schriftliche Unterlagen außer alten Klausuren
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe	erreichte Punktzahl
1	20
2	19
3	20
Σ	59

1. Aufgabe (20 von 60 Punkten)

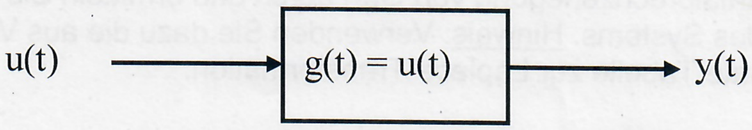
Gegeben sei das folgende zeitabhängige Signal *u(t)*:



a) Ermitteln Sie unter Verwendung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ einen analytischen Ausdruck für die Funktion *u(t)* und geben Sie die Laplace-Transformierte *U(s)* an.

b) Wie groß ist die Energie *E* des Signals u(t)?

Das Signal werde über ein System mit der Übertragungsfunktion *G(s) = U(s)* übertragen.



c) Zeichnen Sie die zeitabhängige Funktion *g(T- t)* für *T = 0* und für *T = 5*.

d) In welchem Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ besitzt das Faltungsintegral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$ von null abweichende Werte?

e) Zeichen Sie das Ausgangssignal y(t) und geben Sie den Maximalwert y_{max} an. Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus der Übung.

2. Aufgabe (20 von 60 Punkten)

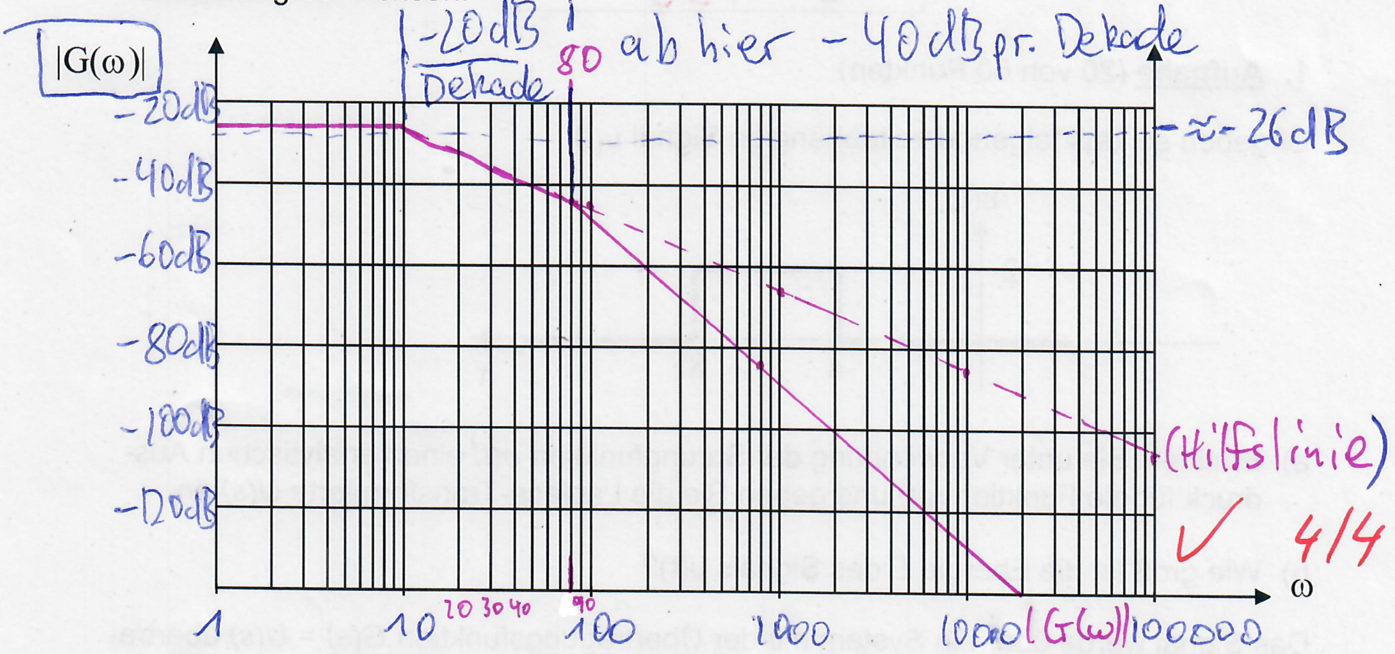
Gegeben sei das folgende LTI-System:

$$G(s) = \frac{40}{s^2 + 90 \cdot s + 800}$$

a) Welches Globalverhalten zeigt das System? Ist *G(s)* realisierbar und stabil? Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Bestimmen Sie die V-Normalform von *G(s)* und geben Sie den Verstärkungsfaktor sowie die Kennfrequenzen an.

c) Tragen Sie den asymptotischen Amplitudengang von *G(s)* in folgendes Bode-Diagramm ein. Hinweis: Wählen Sie basierend auf Unterpunkt b) eine geeignete Skalierung der Achsen.



d) Führen Sie die Partialbruchzerlegung von G(s) durch und ermitteln Sie daraus die Stoßantwort g(t) des Systems. Hinweis: Verwenden Sie dazu die aus Vorlesung und Übung bekannte Tabelle zur Laplace-Transformation.

Für den folgenden Unterpunkt ist ein Matlab m-File zu erstellen:

e) Geben Sie G(s) als LTI-Objekt ein, stellen Sie nur den Amplitudengang von G(s) im Frequenzbereich ω = 0.1 bis 1000 mit 100 Stützstellen dar, und lassen Sie im Command-Window die Parameter der Partialbruchzerlegung von G(s) ausgeben.

3. <u>Aufgabe</u> (20 von 60 Punkten)

Gegeben sei ein zeitdiskretes System durch seine rekursive Differenzengleichung:

$$y(k) \;=\; u(k) + 0.9 \cdot y(k-1)$$

a) Ermitteln Sie numerisch die Systemantwort $y(k)$ für k im Bereich $0 \le k \le 4$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ auf folgendes Eingangssignal:

$$u(k) \;=\; \cos(0.5 \cdot \pi \cdot k)$$

b) Geben Sie ein Strukturbild für das System an.

c) Ermitteln Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems und zeichnen Sie den Null-/Polstellenplan. Ist das System stabil (mit Begründung)?

Zur Lösung der folgenden Aufgabenteile ist ein MATLAB m-File zu erstellen:

d) Erzeugen Sie ein LTI-Objekt von $G(z)$. Wählen Sie dabei die Abtastzeit T so, dass für Eingangssignale mit einer maximalen Frequenz von *50 kHz* gerade noch kein Aliasing auftritt und stellen Sie den Pol-/Nullstellenplan von $G(z)$ dar.

e) Ergänzen Sie das m-File derart, dass in einem Grafikfenster die ersten 100 Werte der zeitdiskreten Systemantwort $y(k)$ auf das im Aufgabenpunkt a) gegebene Eingangssignal dargestellt werden.

1

1a)

$u(t) = 2[\varepsilon(t-4) - \varepsilon(t-8)]$ ✓

$U(s) = 2\left[\frac{1}{s}\exp(-4s) - \frac{1}{s}\exp(-8s)\right]$ ✓

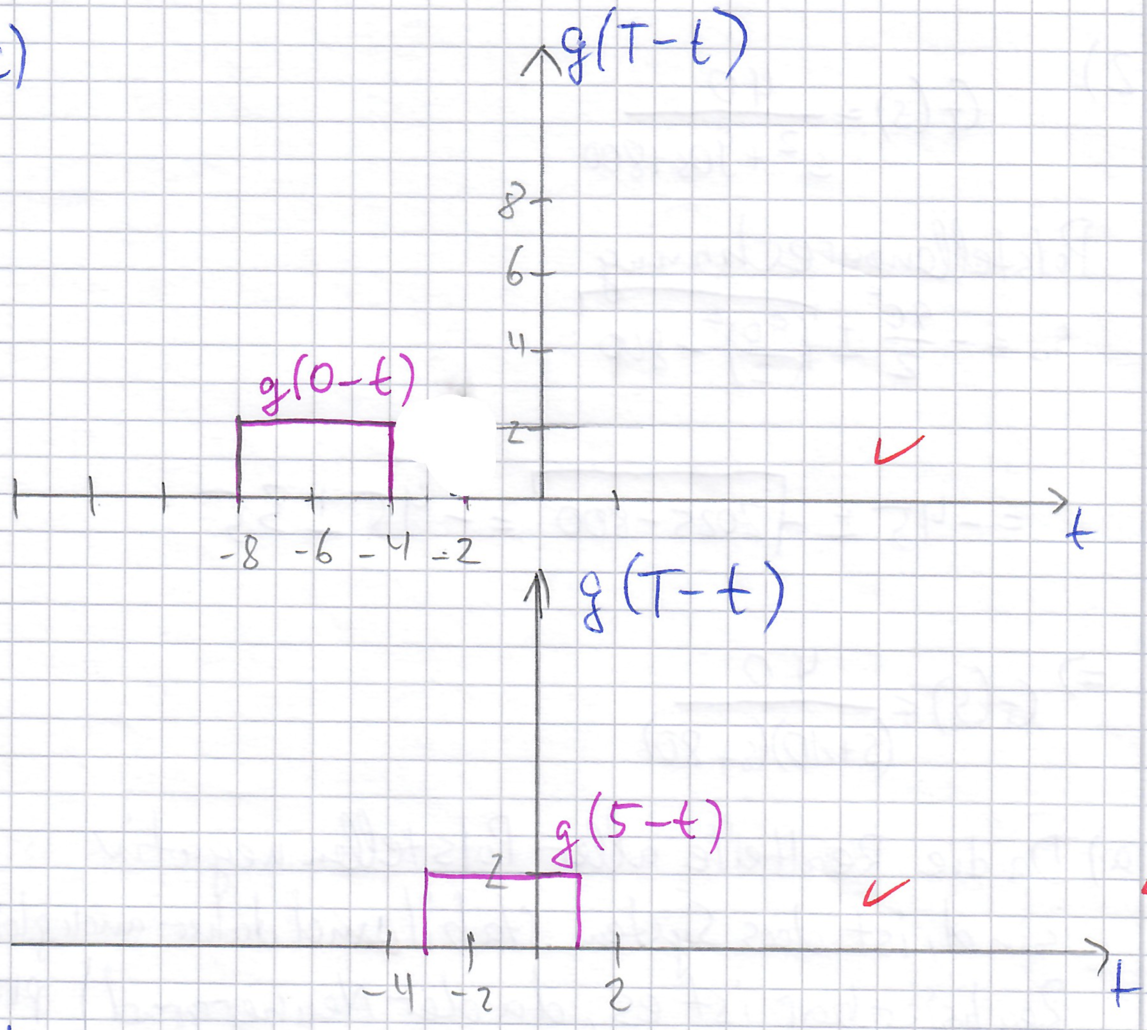
4/4

b)

$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int_4^8 2^2\,dt = 4[8-4] = 16$ ✓

4/4

c)



4/4

d) Im Intervall $t \in]8;16[$ ist $y(t) \neq 0$ ✓ 4/4

Fortsetzung auf Rückseite!

c)

4/4

$y_{max} = 16$

2)

$$G(s) = \frac{40}{s^2 + 90s + 800}$$

Polstellenberechnung

$$s_0 = -\frac{90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{90}{2}\right)^2 - 800}$$

$$= -45 \pm \sqrt{2025 - 800} = -45 \pm 35$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{40}{(s+10)(s+80)}$$

a) Da die Realteile aller Polstellen negativ sind, ist das System stabil ~~und~~ und daher auch global proportional.
Realisierbar ist es, da der Nennergrad der Übertragungsfunktion größer als dessen Zählergrad ist.

4/4

(2)

b) $G(s) = 40 \dfrac{1}{\frac{10}{10}(s+10)\frac{80}{80}(s+80)}$

$= \dfrac{4\cancel{0}}{80\cancel{0}} \cdot \dfrac{1}{(s/10+1)(s/80+1)}$

$= \underbrace{\dfrac{1}{20}}_{V_{lin}} \cdot \dfrac{1}{(s/\underbrace{10}_{\omega_{k1}}+1)(s/\underbrace{80}_{\omega_{k2}}+1)}$ ✓

(linearer Verstärkungsfaktor

$V_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{20}\right)$

$= -20 \log_{10}(20) \approx -26{,}020\,dB$ ✓

4/4

d)

$G(s) = \dfrac{40}{(s+10)(s+80)} = \dfrac{A}{(s+10)} + \dfrac{B}{(s+80)}$ ✓

$\Rightarrow 40 = A(s+80) + B(s+10)$

$s^0: 40 = 80A + 10B$

$s^1: 0 = A + B \Rightarrow A = -B$

$\Rightarrow 40 = -80B + 10B =$

$\Rightarrow B = -\frac{4}{7} \qquad \Rightarrow A = \frac{4}{7}$ ✓

Probe: $40 = \dfrac{80 \cdot 4}{7} - \dfrac{10 \cdot 4}{7}$ wahr

Stoßantwort (e) auf letzten Blatt!

3) auf Rückseite

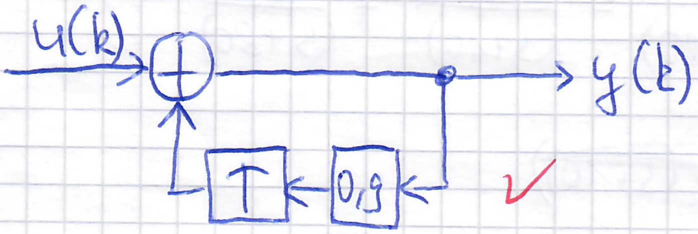
3)

a)

k	$u(k)$	$y(k-1)$	$y(k)$
0	1	0	1
1	0	1	0,9
2	−1	0,9	$-1+0{,}9^2=-0{,}19$
3	0	−0,19	−0,171
4	1	−0,171	$1-0{,}9\cdot 0{,}171=0{,}8461$ ✓

5/5

b) $\boxed{T}$ $\boxed{z^{-1}}$ – Zeitverzögerungsglieder



✓ 3/3

c) $y(k) = u(k) + 0{,}9\,y(k-1)$

$$Y(z) = U(z) + 0{,}9\,Y(z)\,z^{-1}$$

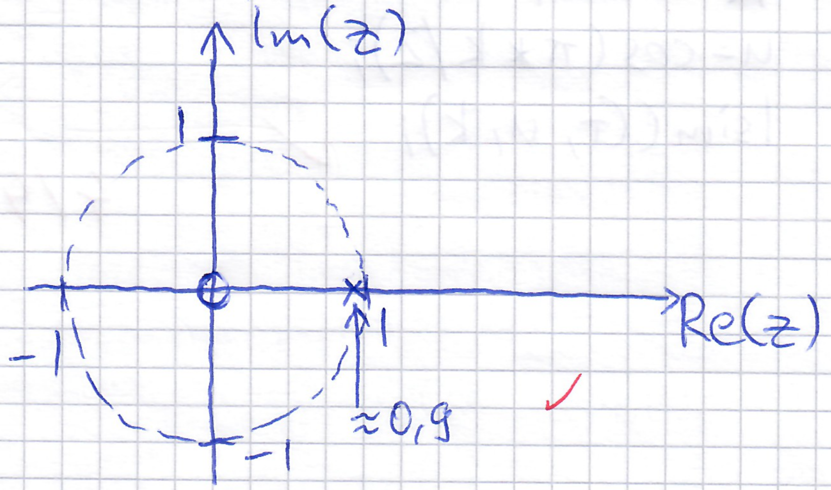
$$\Rightarrow \quad Y(z)(1-0{,}9z^{-1}) = U(z)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-0{,}9z^{-1}} = \frac{1}{1-0{,}9/z}$$

$$= \frac{z}{z-0{,}9} \quad ✓$$

Pol-Nullstellenplan (3-Fortsetzung) 3

o – Nullstelle   x – Polstelle



Das System ist stabil, da sich die Polstelle im Einheitskreis um den Koordinatenursprung der z-Ebene befindet ✓ 5/5

d) Nach Shannon-Abtasttheorem gilt:

$$f_{sample} \geq 2 \cdot f_{signal}$$
$$\geq 2 \cdot 50\,kHz$$
$$\geq 100\,kHz$$

$$T_{sample} = \frac{1}{f_{sample}}$$

$$= \frac{1}{100\,kHz} = \frac{1}{100} \cdot 10^{-3}\,s$$ ✓

$$= 1 \cdot 10^{-5}\,s$$

M-Code:

```
T=1e-5;    z=tf('z',T);
G=z/(z-0,9); pzmap(G);
```
✓ ✓

e) auf Rückseite!

3/3

e)

```
k=0:99; % erste 100 Werte bis einschl. 99
u=cos(π*k/2);
lsim(G,u,k);
```

4/4

zu 2d) (4)

$$G(s) = \frac{4}{7(s+10)} - \frac{4}{7(s+80)}$$

$$= \frac{4s + 4\cdot 80 - 4 - 4\cdot 10}{7(s+10)(s+80)} \quad (\text{Kontrolle})$$

$$= \frac{4\cdot 10}{(s+10)(s+80)}$$

Integrator: $\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

+ Dämpfungssatz: $e^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+a)$

+ Linearitätssatz:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \frac{4}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\} - \frac{4}{7}\left\{\frac{1}{80+s}\right\}$$

$$= \frac{4}{7}\left[\exp(-10t)\sigma(t) - \exp(-80t)\sigma(t)\right]$$

$$= \frac{4}{7}\sigma(t)\left(e^{-10t} - e^{-80t}\right)$$ ✓ 4/4

e)

```
G=tf([40],[1, 90, 800]); ✓
om=logspace(-1, 3, 1000); ✓
    =bode(G,om); (✓) mit |G(ω)|
```

3/4

```
[n,p,k]=tf2zp([40],[1,90,800]) ✓
```