Klausur Mathematik III (B-TI)
20. September 2019

Dr. T. Dierkes (Lehrbeauftragter)

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

SoSe 2019

Name: [redacted]

Vorname: [redacted]

Matrikelnummer: [redacted]

E-Mail (*nur, falls gewünscht*): [redacted]

Letzte Wiederholung dieser Prüfung gemäß RSPO: ja ☐ nein ☒

Erreichte Prozent: 41

Angerechnete Prozent: —

Prozent Summe: 41

Note: 4.0

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	20	5
2	20	18
3	30	10
4	30	8
Σ	100	41

Wichtige Hinweise:

1. Diese Klausur ist eine **Prüfungsleistung im Sinne der RSPO**. Ein Täuschungsversuch führt zu einem *sofortigen Ausschluss von der Teilnahme* unter Einziehung des Klausurhefts. Der Versuch zählt dann mit *Note 5.0* .
2. Vor Beginn der **90-minütigen Bearbeitungszeit** muss Ihre Identität überprüft werden. Bitte halten Sie einen amtlichen Lichtbildausweis bereit. **Ohne Ausweis keine Teilnahme**.
3. Nach Beginn der Bearbeitungszeit zählt Ihr Teilnahmeversuch auf jeden Fall.
4. **Während der Bearbeitung sind zugelassen:**
   - Ein *eigenhändig* beschriebener Spickzettel DIN A4 (beidseitig).
   - Ein *nichtprogrammierbarer* Taschenrechner.
   - Dieses Klausurheft.
   - Permanente, nicht editierbare Schreibstifte (Kuli, Filzschreiber, Füller, etc).
5. **Schreiben Sie ausschließlich in dieses Aufgabenheft.** Schreiben Sie sämtliche Schritte, die gewertet werden sollen, unbedingt auf die **dafür vorgesehenen Seiten**. Sollten Sie dafür weiteres **freies Papier** benötigen, so bekommen Sie es gestellt. Anderes Material wird nicht akzeptiert.
6. Als **Konzeptpapier** dürfen Sie eigenes *freies* Papier benutzen. Es bleibt selbstverständlich an Ihrem Platz.
7. Wenn Sie Text aus der Wertung nehmen wollen, *rahmen Sie ihn bitte ein und streichen ihn erkennbar durch.* Zwei verschiedene angebotene Lösungen werden **beide nicht bewertet**.
8. Sie können, wenn Sie möchten, oben eine andere E-Mail-Adresse angeben, über die Sie dann Ihr Ergebnis und Ihre Note dieser Prüfung erhalten. Falls Sie dort nichts angeben, werde ich Ihre E-Mail im Moodle verwenden.

%-Punkte	<40	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-89	90-100
Note	5.0	4.0	3.7	3.3	3.0	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	1.0

Fourier-Transformationen

Originalfkt. $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega$	Bildfkt. $\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t$
1	$2\pi \cdot \delta_0(\omega)$
$\cos(a\,t)$	$\pi \cdot \left[\delta_0(\omega + a) + \delta_0(\omega - a)\right]$
$\sin(a\,t)$	$\mathrm{i}\,\pi \cdot \left[\delta_0(\omega + a) - \delta_0(\omega - a)\right]$
$\mathrm{e}^{-a\,t} \cdot \cos(b\,t) \cdot \sigma_0(t)$	$\dfrac{a + \mathrm{i}\,\omega}{(a + \mathrm{i}\,\omega)^2 + b^2}$
$\mathrm{e}^{-a\,t} \cdot \sin(b\,t) \cdot \sigma_0(t)$	$\dfrac{b}{(a + \mathrm{i}\,\omega)^2 + b^2}$
$\mathrm{e}^{-a\,t} \cdot \sigma_0(t)$	$\dfrac{1}{a + \mathrm{i}\,\omega}$
$t \cdot \mathrm{e}^{-a\,t} \cdot \sigma_0(t)$	$\dfrac{1}{(a + \mathrm{i}\,\omega)^2}$
$\mathrm{e}^{-a\,\lvert t \rvert}$	$\dfrac{2\,a}{a^2 + \omega^2}$
$\dfrac{1}{a^2 + t^2}$	$\dfrac{\pi}{a} \cdot \mathrm{e}^{-a\,\lvert\omega\rvert}$

$\delta_0(\xi)$: Diracsche δ-Distribution an der Stelle $\xi = 0$.

$\sigma_0(t)$: Sprungfunktion von 0 auf 1 an der Stelle $t = 0$.

$a, b \in \mathbb{R}^+$: Konstante reelle Zahlen > 0 .

Laplace-Transformationen

Originalfkt. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$	Bildfkt. $F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-s\,t}\;\mathrm{d}t$
1	$\dfrac{1}{s}$
$\cos(a\,t)$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2}$
$\sin(a\,t)$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2}$
$\mathrm{e}^{-b\,t} \cdot \cos(a\,t)$	$\dfrac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$
$\mathrm{e}^{-b\,t} \cdot \sin(a\,t)$	$\dfrac{a}{(s - b)^2 + a^2}$
$\mathrm{e}^{-a\,t}$	$\dfrac{1}{s + a}$
$t^n \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

$a, b \in \mathbb{C}$: Konstante komplexwertige Zahlen .

A 1

1. Aufgabe (20 Punkte) : Allgemeine Fragen

1.1. Divergenzkriterien für Reihen (6 Punkte) Welche Divergenzkriterien für unendliche Reihen kennen Sie? Zählen Sie mindestens drei Kriterien auf und erläutern Sie diese jeweils stichwortartig.

1.2. Fourier-Transformation (5 Punkte) Wie sind das Frequenz-, das Amplituden- und das Phasenspektrum einer Fourier-transformierbaren Funktion $t \mapsto f(t)$ definiert?

1.3. Differentialgleichungen (3 Punkte) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen (Ordnung, autonom, linear/nichtlinear, homogen/inhom., konstante/nicht konstante Koeff.):

a) $y''' \cdot \sqrt{y} + x = 0$ b) $3\,x'' + k \cdot x = 17\,g$ c) $5\,y' - y = \log_e(x)$

1.4. Jacobi-Matrix (6 Punkte) Die Gesamtleitfähigkeit $G = G_1 + G_2$ zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 und R_2 ist die Summe der Einzelleitfähigkeiten $G_1 = {}^1/_{R_1}$ und $G_2 = {}^1/_{R_2}$. Die Abhängigkeit des Gesamtwiderstandes von den Einzelwiderständen R_1 und R_2 ist gesucht:

Wie lautet die Jacobi-Matrix der zusammengesetzten Funktion $(f \circ g)(R_1, R_2)$, wenn

$$f(x,y) := \frac{1}{x+y} \quad \text{und} \quad g(x,y) := \begin{pmatrix} {}^1/_x \\ {}^1/_y \end{pmatrix} \quad \text{definiert sind?}$$

1.1) Minorantenkriterium, Wenn es für eine Reihe a_k eine Reihe b_k mit $b_k < a_k$ gibt, die divergiert, dann divergiert auch a_k ✓

4/6 Geometrische Reihen für $|q| \geq 1$ divergieren Kein Kriterium! −2

Wenn die Folge a_k keine Nullfolge ist, ist sie divergent ✓

1.2) / 0/5

1.3) a) 3te Ordnung ✓, homogen f, konstante Koeffiziente f, nicht linear

b) 2te Ordnung ✓, inhomogen ✓, nicht konstante Koeffizienten f, linear −2

1/3 c) 1te Ordnung ✓, inhomogen ✓, konstante Koeffizienten ✓, linear ✓

1.4) / 0/6

5/20

2. Aufgabe (20 Punkte) : Taylor-Reihen

Bekanntlich gilt $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$. Lösen Sie *näherungsweise* die nichtlineare Gleichung

$$\cosh(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(8 + \frac{x^4}{6}\right)$$

wie folgt:

2.1. (15 Punkte) Entwickeln Sie die Funktion $x \mapsto \cosh(x)$ um $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe bis zur vierten Potenz und nennen diesen Teil der Taylor-Reihe $T_4(x)$.

Mit Ihrer Entwicklung $T_4(x)$ ergibt sich die einfachere, approximative Gleichung

$$T_4(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(8 + \frac{x^4}{6}\right) ,$$

mit der Sie dann die gesuchte Näherungslösung x berechnen können, indem Sie diese nach x auflösen.

2.2. (5 Punkte) Wie groß ist der relative Fehler Ihrer approximativen Lösung, wenn der auf 18 Stellen nach dem Komma genaue Wert der Lösung lautet $x \mathrel{\hat{=}} \pm 1.406319970371956368(9)$?

2.1) $T_4(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} x + \frac{f''(x_0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(IV)}(x_0)}{4!} x^4$ ✓

$f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ ✓

$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ ✓

$f''(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ ✓

$f'''(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ ✓

$f^{(IV)}(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ ✓

$T_4(x) = \frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-0} + \frac{\overbrace{(\frac{1}{2}e^{0} - \frac{1}{2}e^{-0})}^{=0}}{1!} \cdot x + \frac{(\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-0})}{2!} x^2 + \frac{\overbrace{(\frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-0})}^{=0}}{3!} x^3 + \frac{(\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-0})}{4!} x^4$ ✓

$T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ ✓

$T_4(x) = \frac{1}{4}\left(8 + \frac{x^4}{6}\right)$

$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = 2 + \frac{1}{24}x^4 \quad | - \frac{1}{24}x^4$ ✓

$1 + \frac{1}{2}x^2 = 2 \quad | -1$ ✓ 15/15

$\frac{1}{2}x^2 = 1 \quad | \cdot 2$ ✓

$x^2 = 2 \quad | \sqrt{\ }$ ✓

$\underline{\underline{x = \pm\sqrt{2}}}$ ✓

2.2

$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$

3

$R_4(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{x}-e^{-x}}{120} x^5 = \frac{e^{x}-e^{-x}}{240} x^5 = \frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{240} x^5 \leq \frac{e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}}{240} (\sqrt{2})^5 = \underline{0{,}091279924}$

-2

Das ist nicht der relative Fehler

relativer Fehler: $\left| \frac{x-\sqrt{2}}{x} \right| = \left| \frac{1.40631997\ldots - \sqrt{2}}{1.40631997\ldots} \right| = 0.0056\ldots$

$\Rightarrow \underline{0.56\ \%}$

3/5

18/20

3. Aufgabe (30 Punkte) : Fourier-Transformationen

Der Frequenzgang $\widehat{g}(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ eines Übertragungssystems sei durch $\widehat{g}(\omega) = \dfrac{2}{(1+\mathrm{i}\,\omega)\,(3+\mathrm{i}\,\omega)}$ gegeben.

3.1. System-Impulsantwort (20 Punkte)

Wie lautet die Originalfunktion $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{g}(\omega)\}$ (d.h. die Impulsantwort des Systems)?

[*Tipp*: Wie lautet die Partialbruchzerlegung von $\widehat{g}(\omega)$?]

3.2. Differentialgleichung des Übertragungssystems (10 Punkte)

Wie lautet die lineare Differentialgleichung (mit konstanten Koeffizienten) des Übertragungssystems?

3.1) Partialbruchzerlegung von $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)} + \frac{1}{(3+i\omega)} \cdot \frac{1}{2+i\omega}$ ∫ −5

Rücktransformierung

$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\} = e^{-t}\sigma_0(t)$ ✓

$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\} = e^{-3t}\sigma_0(t)$ ✓

$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+i\omega}\right\} = e^{-2t}\sigma_0(t)$ ✓

$g(t) = e^{-t}\sigma_0(t) + e^{-5t}\sigma_0{}^2(t)$

Rechnung dazu? −5

$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{3+i\omega}$

$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\}$

$= \left(e^{-t} - e^{-3t}\right)\cdot\sigma_0(t)$

$= e^{-t} - e^{-3t}$ für $t \geq 0$

10/20

3.2) — −10

lin. Dgl.: $y'' + 4y' + 3y = 0$, da

$0 = p(t) = (t+1)(t+3) = t^2 + 4t + 3$ die

charakteristische Gleichung der Dgl. ist.

0/10

10/30

4. Aufgabe (30 Punkte) : Differentialgleichungen

Ein Kondensator der Kapazität C soll aufgeladen werden. Dazu wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eine konstante Batteriespannung $u_B = 5\,[\mathrm{V}]$ über einen Ohmschen Widerstand R an den Kondensator angeschlossen. Die Differentialgleichung der zeitlichen Kondensatorspannung $t \mapsto u_c(t)$ für diesen bei $t_0 = 0$ einsetzenden Aufladungsprozeß lautet:

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u_B$$

4.1. Lösen der Differentialgleichung (20 Punkte)

Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung $t \mapsto u_C(t)$ für $t \geq 0$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

4.2. Skizze der Lösungsfunktion (10 Punkte)

Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf $t \mapsto u_C(t)$ (Achsenbeschriftungen bitte nicht vergessen!).

Bestimmen Sie *graphisch* den Zeitpunkt, an dem der Kondensator zur Hälfte aufgeladen ist.

4.1) Aufladung des Kondensators: $U_C(t) = U_0 (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = U_0 - U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ ✓

$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + U_C = U_B$ $\qquad U'_C(t) = \frac{U_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$

$R \cdot C \cdot U_C' + U_C = U_B$

Lösungsmethode?

Rechnung?

$\cancel{R \cdot C \cdot U_C' + U_C - U_B = 0}$

$\cancel{R} \cancel{C} \cdot \frac{U_0}{\cancel{RC}} e^{-\frac{1}{RC}t} + U_0 (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = 5$ $\qquad -10$

$U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} + U_0 (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = 5$ $\qquad \Rightarrow U_0 = ?$ -2

8/20

4.2) / -10

0/10

8/30