Julia Loutchko
BHT Berlin / FB II

Klausur „Mathematik 2/ TI “ (SoSe23, 18.07.2023)

Vorname: [redacted]
Name: [redacted]
Matr.-Nr.: [redacted]

Letzter Prüfungsversuch: ☐ ja ☒ nein

Wichtige Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die bei den Aufgaben angegebenen Punktzahlen entsprechen in etwa der Zeit in Minuten, die Sie maximal zur Bearbeitung der Aufgaben verwenden sollten.
- Täuschungsmanöver führen zum sofortigen Ausschluss von der Klausur!
- Teilnahme an der Klausur bedeutet, dass kein Prüfungsrücktritt für Mathematik 2 mehr möglich ist.

Ich habe die Hinweise zur Kenntnis genommen:

[redacted]

Aufgabe	1.	2.	3.	4.	5.	Bonus	6 (.ZA)	Σ
erreichbare Punkte	18	25	16	14	17	15	15	
erreichte Punkte	18	25	16	14	17	15	15	

1,0

1. Aufgabe (18 Punkte). Gegeben ist die 3-reihige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.
Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe (25 Punkte). Führen Sie Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 2}$$

nach dem folgenden Schema:

1) Definitionsbereich,
2) Symmetrie,
3) Nullstellen,
4) Schnittpunkte mit der y-Achse,
5) Pole (senkrechte Asymptoten),
6) Asymptoten ïn Unendlichen",
7) relative Extremwerte,
8) Wertebereich,
9) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

3. Aufgabe (16 Punkte). Berechnen Sie das unbestimmte Integral (Partialbruchzerlegung)

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 - 4)}\, dx,$$

4. Aufgabe (14 Punkte). Linealisieren Sie die Funktion

$$f(x) = e^{2x} \cdot \sin(6x)$$

in der Umgebung der Stelle $x_0 = 0$.

5. Aufgabe (17 Punkte). Berechnen Sie das unbestimmte Integral (Partielle Integration)

$$\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{5}}\, dx,$$

6. Zusatzaufgabe (15 Punkte). Wie müssen die Konstanten A und B gewählt werden, dai
die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0, \\ Ax + B, & 0 < x < 4, \\ x^2 + 2x + 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

überall auf $I\!R$ stetig wird?

[redacted] # Mathematik II 18.07.2023

1. Aufgabe

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 4 & 0-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$0 = \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) - (3)(2)(-\lambda)$

$= \lambda^2(1-\lambda) + 6\lambda$

$= \lambda(\lambda(1-\lambda) + 6) \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

$0 = \lambda(1-\lambda) + 6$

$= -\lambda^2 + \lambda + 6 \quad | \cdot (-1)$

$= \lambda^2 - \lambda - 6$

$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+24}{4}} = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\boxed{\lambda_2 = -2}$ $\quad \boxed{\lambda_3 = 3}$

$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v_1} = \vec{0} \qquad \underline{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha}$

$\lambda_2 = -2: \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & +2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} | - III \cdot \frac{3}{2} \\ | : 2 \\ | : 2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b_3 = -b_1 \\ b_2 = -2b_1 \end{matrix}$

$\underline{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \beta}$

$\lambda_3 = 3: \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} | + 1 \cdot III \\ | : (-3) \\ | : (-3) \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} c_2 = \frac{4}{3} c_1 \\ c_3 = \frac{2}{3} c_3 \end{matrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot \gamma$

Die Matrix ist diagonalisierbar, da es genau so viele Eibenvektoren, wie Eigenwerte gibt ✓

2. Aufgabe

$f(x) = \frac{x^2+4x}{x+2}$

$(x^2+4x):(x+2) = x+2 - \frac{4}{x+2}$
$-(x^2+2x)$
$+2x$
$-(2x+4)$
-4

1) $D := x \in \mathbb{R} / \{-2\}$

2) $f(-x) = \frac{x^2-4x}{2-x} \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$

$-f(-x) = -\left(\frac{x^2+4x}{x+2}\right) \Rightarrow -f(x) \neq f(x)$

$\Rightarrow$ Die Funktion weißt keine Symetrie auf.

~~3) $0 = f(x) = \frac{x^2+4}{x+2} \quad | \cdot (x+2)$~~

~~$0 = x^2+4 \quad | -4$~~

~~$-4 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$~~

~~$x_{1/2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$, nicht Teil des Definitionsbereichs~~

~~$\Rightarrow$ keine Nullstellen.~~

4) $f(0) = \frac{0^2+4\cdot(0)}{0+2} = \underline{\underline{0}}$

3) $f(x) = 0 = \frac{x^2+4x}{x+2} \quad | \cdot x+2$

$0 = x^2+4x = x(x+4) \quad \underline{\underline{x_{01} = 0}}$

$0 = x+4 \quad | -4$

$x_{02} = -4$

5.) Die Funktion besitzt eine Polstelle für $\underline{\underline{x = -2}}$

6.) $(x^2+4x):(x+2) = x+2 - \frac{4}{x+2}$
$-(x^2+2x)$
$2x$
$-(2x+4)$
$\underline{-4}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = x+2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = x+2$

Die Funktion nähert sich im Unendlichen der Funktion $x+2$ an.

[redacted]

zu 2. Aufgabe)

7) $f(x) = x+2 - \frac{4}{x+2}$

$f'(x) = 1 + \frac{4}{(x+2)^2}$

$f''(x) = -\frac{8}{(x+2)^3}$

$f'''(x) = \frac{24}{(x+2)^4}$

$0 = f'(x) = 1 + \frac{4}{(x+2)^2}$

$-1 = \frac{4}{(x+2)^2} \quad | \cdot (x+2)^2$

$4 = -(x+2)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 4 = i \cdot (x+2)$

$\Rightarrow$ keine reelen Extrem~~werte~~ punkte im ~~Wertebereich~~ Definitionsbereich

Probe der Ableitung:

$f(x) = \frac{x^2+4x}{x+2}$

$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+2) - (x^2+4x)}{(x+2)^2}$

$0 = f'(x) = (2x+4)(x+2) - (x^2+4x)$

$= 2x^2 + 8x + 8 - x^2 - 4x$

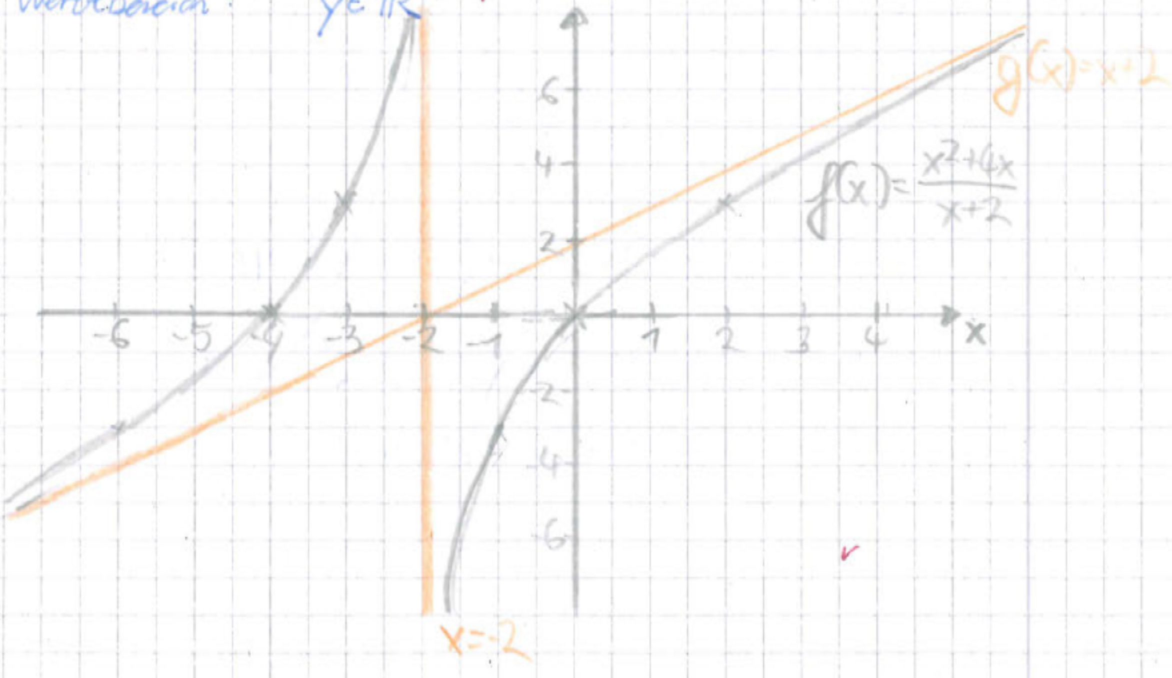
$= x^2 + 4x + 8$

$x_{01/02} = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm \sqrt{-4}$

$\Rightarrow$ keine reelen Extremwerte ✓

8) Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$ ✓

9)



✓

3. Aufgabe

$F(x) = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-4)} dx \qquad z = \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-4)} \qquad z = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

$z = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$

$x^2+1 = A(x^2-4) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2)$

I $x = 1$: $2 = A(1-4) = -3A \quad | :(-3)$

$\underline{A = -\frac{2}{3}}$

II $x = 2$: $5 = B(2-1)(2+2) = B(-1)(4) = +4B \quad | \cdot (+\frac{1}{4})$

$B = \underline{+\frac{5}{4}}$

III $x = -2$: $5 = C(-2-1)(-2-2) = C(-3)(-4) = 12C \quad | :12$

$C = \frac{5}{12}$

$z = \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{x-1} + \left(+\frac{5}{4}\right)\frac{1}{x-2} + \left(\frac{5}{12}\right)\frac{1}{x+2}$

$F(x) = \int z\, dx = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{5}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{5}{12} \int \frac{1}{x+2} dx$

$\underline{= -\left(\frac{2}{3}\right) \ln|x-1| + \frac{5}{4} \cdot \ln|x-2| + \frac{5}{12} \cdot \ln|x+2|} + c$

5. Aufgabe

$\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{5}} dx = -5 \cdot x^2 e^{-\frac{x}{5}} + 5 \cdot \int 2x \cdot e^{-\frac{x}{5}} dx + c$

$\int 2x \cdot e^{-\frac{x}{5}} dx = -5 \cdot 2x \cdot e^{-\frac{x}{5}} + 10 \cdot \int e^{-\frac{x}{5}} dx + c$

$\int e^{-\frac{x}{5}} dx = -5e^{-\frac{x}{5}} + c$

$\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{5}} dx = -5 \cdot x^2 e^{-\frac{x}{5}} + 5 \cdot \left(-5 \cdot 2x \cdot e^{-\frac{x}{5}} + 10 \cdot \left(-5e^{-\frac{x}{5}}\right)\right) + c$

$= \left(-5e^{-\frac{x}{5}}\right) \cdot x^2 - 5e^{-\frac{x}{5}}(10x) - 5e^{-\frac{x}{5}} \cdot 50 + c$

$= \left(-5e^{-\frac{x}{5}}\right) \cdot (x^2 + 10x + 50) + c$ ✓

[redacted]

6. Zusatzaufgabe

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \le 0 \\ Ax+B, & 0 < x < 4 \\ x^2+2x+1, & x \ge 4 \end{cases}$$

$g(x) = Ax+B$

e^{2x}, für $x=0$, $e^{2\cdot 0} = \underline{\underline{1}}$ $\Rightarrow f(0)=1$

x^2+2x+1, für $x=4$, $16+8+1 = \underline{\underline{25}}$ $f(4)=25$

$g(0)=1 = A0+B \Rightarrow \underline{B=1}$

$g(4)=25 = 4A+B \Rightarrow 25 = 4A+1 \quad |-1$

$24 = 4A \quad |:4$

$\underline{\underline{A=6}}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \le 0 \\ 6x+1, & 0 < x < 4 \\ x^2+2x+1, & x \ge 4 \end{cases}$$

✓

4. Aufgabe

$f(x) = e^{2x} \cdot \sin(6x)$, $x_0 = 0$

$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin(6x) + e^{2x} \cdot 6 \cdot \cos(6x)$

$= 2e^{2x}(\sin(6x) + \cancel{3}^{6} \cdot \cos(6x))$

$f'(0) = 2e^{2\cdot 0} \cdot (\sin(0) + \cancel{3} \cdot \cos(0))$

$= 1 \cdot (0 + 3 \cdot 1)$

$\underline{\underline{= \cancel{3}}} \mathrel{\hat{=}} m$ 6

$t(x) = m \cdot x + n$

$f(0) = e^{2\cdot 0} \cdot \sin(0) = \underline{0} \Rightarrow n=0$

$\underline{\underline{t(x) = \cancel{3}^{6} \cdot x}}$

zu Aufgabe 3)

$$-\frac{2}{3}\cdot \ln|x-1| + \frac{5}{4}\cdot \ln|x-2| + \frac{5}{12}\cdot \ln|x+2| + c = F(x)$$

$$F(x) = -\frac{8}{12}\cdot \ln|x-1| + \frac{15}{12}\cdot \ln|x-2| + \frac{5}{12}\cdot \ln|x+2| + C$$
$$= \frac{1}{12}\left(-8\cdot \ln|x-1| + 15\cdot \ln|x-2| + 5\cdot \ln|x+2|\right) + C$$
$$= \frac{1}{12}\left(-8\cdot \ln|x-1| + 5\cdot\left(3\cdot \ln|x-2| + \ln|x+2|\right)\right) + C$$
$$= \frac{1}{12}\left(-8\cdot \ln|x-1| + 5\cdot\left(\ln|(x-2)^3\cdot(x+2)|\right)\right) + C$$
$$= \frac{1}{12}\left(-8\cdot \ln|x-1| + 5\cdot\left(\ln|(x-2)^2(x^2-4)|\right)\right) + C$$
$$= \frac{1}{12}\left(-8\cdot \ln|x-1| + 5\cdot\left(\ln|(x^2-4x+4)(x^2-4)|\right)\right) + C$$

$$(x^2-4x+4)(x^2-4) = x^4-4x^3+4x^2-4x^2+16x-16$$
$$= x^4-4x^3+16x-16$$
$$= x^3(x-4)+16(x-1)$$

$$F(x) = \frac{1}{12}\left(-8\cdot \ln|x-1| + 5\cdot\left(\ln|x^3(x-4)+16(x-1)|\right)\right) + C, x \in \{1,2,-2\}$$