Mathematik 2

Bachelor Technische Informatik
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Marlene Müller
marlene.mueller@beuth-hochschule.de

23. Juli 2018

Name, Vorname: [redacted]

Matrikelnr.: [redacted]

3. Versuch? ☐ Ja ☒ Nein
4. Belegung? ☐ Ja ☒ Nein

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung (ohne eigene Notizen), ein A4-Blatt (handgeschrieben) mit selbst gewähltem Inhalt, Taschenrechner, permanente Schreibstifte, leere Schreibblätter

Bitte verwenden Sie keinen Bleistift zum Schreiben und keine Korrekturmittel (Tipp-Ex etc.). Notieren Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedem Blatt, das Sie abgeben. Kennzeichnen Sie bitte auch klar, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Die Bearbeitungszeit beträgt 100 Minuten. Zum Bestehen der Klausur sind 45 Punkte notwendig. Ihre Bonuspunkte werden angerechnet.

Wichtig:

- *Geben Sie bitte immer auch Ihre verwendeten Berechnungsformeln an, erläutern bzw. begründen Sie Ihren Lösungsweg.*
- *Stellen Sie Ihren Lösungsweg ggf. kurz, aber nachvollziehbar dar. Ihre Herleitung oder Argumentation wird mit bewertet, nicht nur das berechnete Ergebnis.*
- *Runden Sie numerische Ergebnisse nicht zu stark.*

Bitte folgendes Feld für die Auswertung freilassen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	[+Bonus]	Summe
erreichte Punkte	—	—	9	8	6	7	11	10	4	55
max. Punkte	12	15	12	8	15	8	16	14	[+10]	100

Note: 3,7

Aufgabe 1 (12 P.)

Gegeben sei die folgende Adjazenzmatrix einer Relation auf der Menge $M = \{a, b, c, d\}$:

$$A(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der Elemente in $A(R)$ sei ebenfalls a, b, c, d.

(a) Geben Sie einen Digraphen zu R an.

(b) Wie lautet die Adjazenzmatrix der inversen Relation?

(c) Überprüfen Sie, ob die Relation eine Ordnungsrelation ist.

Wenn ja welcher Art (Präordnung, Halbordnung oder Ordnung)? Begründen Sie jeweils, warum welche Eigenschaften gelten oder auch nicht gelten.

Aufgabe 2 (15 P.)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = \frac{3\,n^2 - n}{2}$$

Aufgabe 3 (12 P.)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Eliminationsverfahrens. (Geben Sie Ihre verwendeten Umformungen an!)

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (8 P.)

Gegeben seien die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuchen (und begründen) Sie, ob jeweils zwei Vektoren paarweise linear abhängig bzw. unabhängig sind.

(b) Untersuchen (und begründen) Sie, ob alle drei Vektoren linear abhängig bzw. unabhängig sind.

Aufgabe 5 (15 P.)

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 11 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie (sofern möglich) die folgenden Matrixprodukte.
Falls die Berechnung nicht möglich ist, geben Sie kurz die Begründung dafür an.

$$AB\,, \quad AC\,, \quad BC$$

(b) Berechnen Sie außerdem (sofern möglich) die folgenden Ausdrücke.
Falls die Berechnung nicht möglich ist, geben Sie kurz die Begründung dafür an.

$$\det(A)\,, \quad B + C^{\top}\,, \quad C^{-1}$$

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

Aufgabe 6 (8 P.)

Bestimmen Sie die Grenzwerte (berechnen bzw. begründen Sie!):

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 5}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 3}{2x^2 - 5}$

Aufgabe 7 (16 P.)

Bilden Sie jeweils die 1. Ableitungen der Funktion:

(a) $f(x) = 2e^x - \sqrt{5x}$

(b) $f(x) = \cos(5e^{-x} + \sin(2x))$

(c) $f(x) = 3x^5 \cos(x) + 2$

(d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{\sin(x)}$

Aufgabe 8 (14 P.) X

(a) Geben Sie zu den folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an und berechnen Sie danach das genannte Integral:

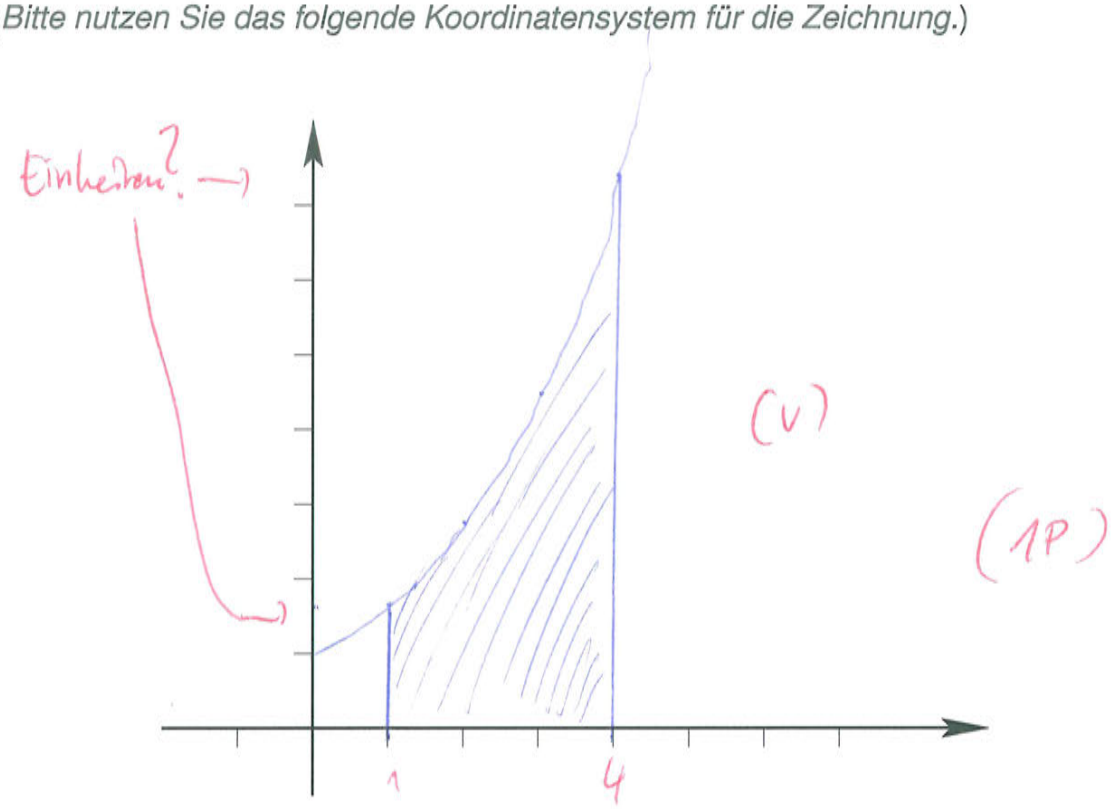
(a.1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3\,, \qquad \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(a.2) $f(x) = 2\cos(x)\,, \qquad \int\limits_{\pi}^{4} f(x)\,dx$

(b) Geben Sie zur folgenden Funktion eine Stammfunktion an und berechnen Sie danach das genannte Integral. Veranschaulichen Sie hier zusätzlich mit einer Skizze die Fläche, die durch das Integral berechnet wird:

$$f(x) = 0.5\,e^{0.5\,x}\,, \qquad \int_1^4 0.5\,e^{0.5\,x}\,dx$$

(*Bitte nutzen Sie das folgende Koordinatensystem für die Zeichnung.*)



(V)

(1P)

1. Klausur Mathematik 2 23.07.18

[redacted] [redacted]

7) a) $f(x) = 2e^{x} - \sqrt{5x} = 2e^{x} - \sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 2e^{x} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$ ✓

b) $f(x) = \cos(5e^{-x} + \sin(2x))$

$f'(x) = -\sin(-5e^{-x} + 2\cos(2x))$ (!) · innere Ableitung (−3P)

(Kettenregel!)

c) $f(x) = 3x^5\cos(x) + 2$

$u = 3x^5 \quad u' = 15x^4$

$v = \cos(x) \quad v' = -\sin(x)$

$f'(x) = u \cdot v' + u' \cdot v$

$= -3x^5\sin(x) + 15x^4\cos(x)$ ✓

$= 3x^4(-x\sin(x) + 5\cos(x))$

d) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{\sin(x)} = (3x^2 - 1)\cdot(\sin(x))^{-1}$

$= 3x^2(\sin(x))^{-1} - (\sin(x))^{-1}$ ✓

innere Ableitung!

$u = 3x^2 \quad u' = 6x$ ✓

$v = \sin(x)^{-1} \quad v' = -\cos(x)^{-2}$ f $-\sin(x)^{-2}\cdot\cos(x)$

$f'(x) = 3x^2 \cdot -\cos(x)^{-2} + 6x\sin(x)^{-1} + \cos(x)^{-2}$

$= 3x(-x\cos(x)^{-2} + 2\sin(x)^{-1}) + \cos(x)^{-2}$ (−2P)

$= 3x\left(\frac{-x}{\cos(x)^2} + \frac{2}{\sin(x)}\right) + \frac{1}{\cos(x)^2}$ f

Tolgefehler

5.1 v 5

1. Klausur Mathematik 2 23.07.18

[redacted] [redacted]

8)

a)

a.1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3$

$F(x) = x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 3x + c$

$\int_{-1}^{1} (4x^3 - 5x^2 - 3)\,dx = \left[x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 3x\right]_{-1}^{1}$

$= \left(1^4 - \frac{5}{3}\cdot 1^3 - 3\cdot 1\right) - \left((-1)^4 - \frac{5}{3}(-1)^3 - 3\cdot(-1)\right)$

$= \frac{7}{3} - \frac{11}{3} - \frac{17}{3}$

$= \underline{\underline{-\frac{28}{3}}}$

(4P)

a.2) $f(x) = 2\cos(x)$

$F(x) = -2\sin(x) + c$

$\int_{\pi}^{4} (2\cos(x))\,dx = \left[-2\sin(x)\right]_{\pi}^{4} = (-2\sin(4)) - (-2\sin(\pi))$

$\sin(\pi) = 0$

$= \underline{\underline{-0{,}0299056}}$

auch Bogenmaß!

Bogenmaß

(1P)

b) $f(x) = 0{,}5e^{0{,}5x}$

$F(x) = e^{0{,}5x} + c$

$\int_{1}^{4} (0{,}5e^{0{,}5x})\,dx = \left[e^{0{,}5x}\right]_{1}^{4} = e^2 - e^{0{,}5} = \underline{\underline{5{,}74033}}$

(4P)

1. Klausur Mathematik 2

[redacted] [redacted] 23.07.18

4)

a) $\vec{a}$ ist nicht proportional zu $\vec{b}$, $\vec{b}$ ist nicht proportional zu $\vec{c}$ und $\vec{c}$ ist nicht proportional zu $\vec{a}$.
Somit ist keine Paarung der drei Vektoren voneinander linear abhängig ✓

b)

$$
\begin{aligned}
\text{I}: \quad & 1\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\
\text{II}: \quad & 4\lambda_1 - 1\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad 4\text{I} + \text{II} \cdot 1 \\
\text{III}: \quad & -2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 1\lambda_3 = 0 \quad 2\text{I} + \text{II}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\
& \cancel{1\lambda_1} + 17\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\
& \quad + 17\lambda_2 + 5\lambda_2 = 0
\end{aligned}
$$

Alle drei Vektoren sind linear abhängig, da das LGS unendlich viele Lösungen hat, wir sehen dass der doppelt auftretende Zeile. ✓

(evtl. einfacher mit Determinante)

S. 3 v. 5

1. Klausur Mathematik

[redacted] [redacted] 23.07.18

3

a)
$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ \mathrm{II} & 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = & -1 \quad -2\mathrm{I} + \mathrm{II} \\ \mathrm{III} & -2x_1 + 10x_2 + x_3 & = & 8 \quad \mathrm{I} + \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ \mathrm{II}' & x_2 + x_3 & = & -3 \\ \mathrm{III}' & 11x_2 + 4x_3 & = & 9 \quad -4\mathrm{II}' + \mathrm{III}' \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I}^* & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ \mathrm{II}' & x_2 + x_3 & = & -3 \\ \mathrm{III}'' & 7x_2 & = & 21 \quad |:7 \end{array}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 3}}$$

$$3 + x_3 = -3 \quad |-3$$

$$\underline{\underline{x_3 = -6}}$$

$$2x_1 + 3 + 3(-6) = 1 \quad |-3$$

$$2x_1 - 18 = -2 \quad |+18$$

$$2x_1 = 16 \quad |:2$$

$$x_1 = 8$$

$$\mathbb{L} = \{8, 3, -6\}$$ ✓

b)
$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 4x_1 - 2x_2 & = & 6 \\ \mathrm{II} & -2x_1 + x_2 & = & -3 \quad \mathrm{I} + 2\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$4x_1 - 2x_2 = 6$$

$$0 = 0$$ ✓

Unendlich viele Lösungen (✓) $\Rightarrow$ welche? (−3P)

S. 4 v 5

1. Klausur Mathematik

[redacted] [redacted] 23.07.18

~~5) a) AB = 5 25 -10~~

6)

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ ✓

für x gegen ∞ strebt der Term gegen 0 (4P)

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+1}{x^2+5} = \frac{1^2-4\cdot 1+1}{1^2+5} = \frac{1}{6}$ (✓) ✓

für x gegen 1 strebt der Term gegen $\frac{1}{6}$ (3P)

5)

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 29 & -10 \\ 3 & 17 & -6 \end{pmatrix}$$ ✓

$$BC = \begin{pmatrix} -3 & 59 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$$ ✓

AC ist nicht möglich, da die Spaltenzahl von A nicht mit der Zeilenzahl von C übereinstimmt. ✓

(6P)

5.5 v.5