Julia Loutchko
BHT Berlin / FB II

Klausur „Mathematik 2/ TI " (SS 2016, 19.07.2016)

Vorname: [redacted]
Name:
Matr.-Nr.:

Letzter Prüfungsversuch: ☐ ja ☒ nein

Wichtige Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten.**
- Die bei den Aufgaben angegebenen Punktzahlen entsprechen in etwa der Zeit in Minuten, die Sie maximal zur Bearbeitung der Aufgaben verwenden sollten.
- Täuschungsmanöver führen zum sofortigen Ausschluss von der Klausur!
- Teilnahme an der Klausur bedeutet, dass kein Prüfungsrücktritt für Mathematik 2 mehr möglich ist.

Ich habe die Hinweise zur Kenntnis genommen:

[redacted]

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	5	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	20	20	23	27	90	15		
erreichte Punkte	20	20	23	21	84	15	0	99

1,0

1. Aufgabe (20 Punkte). Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.
Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe (20 Punkte). Für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 8}{(x-1)^2}$$

bestimmen Sie:

a) Definitionsbereich,

b) Nullstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse,

c) Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden),

d) Asymptotisches Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen,

3. Aufgabe (23 Punkte). Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x^2+1)(x-1)}$$

Partialbruchzerlegung durch.

4. Aufgabe (27 Punkte). Berechnen Sie das Integral (Partielle Integration):

$$\int_0^1 (3x)^2 \cdot e^{-2x}\, dx.$$

5. Zusatzaufgabe (15 Punkte). Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - x - 6},$$

$$b)\ \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{e^x - 1},$$

[redacted]

Mathe 2

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot E$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)\cdot(7-\lambda)\cdot(3-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 7$ 4P

$\lambda_3 = 3$

Eigenvektor für $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 0 \\ 0 & 7-1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

I $\quad 0x \cancel{+ 0z} - 2y + 0z = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

II $\quad 0x + 6y + 1z = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$

III $\quad 0x + 0y + 2z = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$

$x = 1$

$$\underline{\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$ 4P

1

Eigenvektor für $\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && -6x - 2y + 0z = 0 \\ &\text{II} && 0x + 0y + 1z = 0 && \rightarrow z = 0 \\ &\text{III} && 0x + 0y - 4z = 0 && \rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$$\text{I} \quad -6x = 2y$$

$$y = -3x$$

$$\vec{V}_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Big| \text{ für } \alpha = 1$$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor für $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && -2x - 2y + 0z = 0 \\ &\text{II} && 0x + 4y + z = 0 \\ &\text{III} && 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{II} \quad z = -4y \qquad \vec{V}_3 = \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Big| \text{ für } \beta = 1$$

$$\text{I} \quad -2x = 2y$$

$$\text{I} \quad x = -y \qquad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \end{pmatrix}$$

Ja, die Matrix ist diagonalisierbar, da die geometrische Vielfachheit und die algebraische Vielfachheit gleich 3 sind.

2.) a) $f(x) = \frac{2x^3 - 8}{(x-1)^2}$

~~$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$~~

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 3P

b) Nullstellen

Die Funktion wird Null, wenn der Zähler 0 ist.

$2x^3 - 8 = 0 \quad | +8$

$2x^3 = 8 \quad | :2$

$x^3 = 4 \quad | \sqrt[3]{\square}$

$x = \sqrt[3]{4}$ 3P

Schnittpunkt mit der x-Achse

Bei dem Schnittpunkt mit der x-Achse ist $x = 0$

$\frac{2 \cdot (0)^3 - 8}{(0-1)^2} = \frac{-8}{1} = -8$ 3P

c) ~~Polgerade $= \sqrt[3]{4}$~~

$$\cancel{\lim_{x \to \sqrt[3]{4}} \frac{2x^3 - 8}{}}$$

Polgerade : $x = 1$ 3P

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^3 - 8}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3\left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \cdot \left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$-\infty$

$-\infty \quad \infty$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 \cdot \left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \cdot \left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \underline{\underline{-\infty}}$$

d) im Unendlichen

$$\frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1}$$

$$2x^3 - 8 : (x^2 - 2x + 1) = 2x + 4 + \frac{6x - 12}{(x-1)^2}$$

$$\begin{array}{l} -\ (2x^3 - 4x^2 + 2x) \\ \hline \quad 4x^2 - 2x - 8 \\ \quad 4x^2 - 8x + 4 \\ \hline \qquad 6x - 12 \end{array}$$

$$\underbrace{2x+4}_{p(x)} + \frac{6x-12}{\underbrace{(x-1)^2}_{\cancel{r}(x)}}$$

$y = p(x)$

Asymptote $= \underline{\underline{2x+4}}$

↳ Schiefe Asymptote

3. $$\frac{2x-1}{(x^2+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

Nullstellen von Nenner

$\underline{\underline{x_1 = 1}}$

$\underline{\underline{x_2 = x^2+1}}$

↳ komplexe Nullstellen

$$\frac{A\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)}$$

Koeffizientenvergleich

$$\frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)\cdot(x^2+1)}$$

Koeffizientenvergleich

$x^2 \cdot (A+B) = x^2 \cdot 0$

$x^1 \cdot (C-B) = x \cdot 2$

$x^0 \cdot (A-C) = x^0 \cdot -1$

I $A + B = 0$
II $C - B = 2$
III $A - C = -1$

I $A = -B$

III $-B - C = -1$

$-C = -1 + B$

$C = 1 - B$

III $\cancel{1-B}$ $-B-(1-B) = -1$

$-B - 1 + B = -1$

$-1 = -1$

II $1 - B - B = 2$ $\quad | -1$

$-B - B = \cancel{3}1$

$-2B = 1$

$B = -\frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$

$C = \frac{3}{2}$

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{(x+1)^2}$$

6

9) $\int_0^1 (3x)^2 \cdot e^{-2x}\, dx$

$$\int_0^1 (3x)^2 \cdot e^{-2x}\, dx$$

$u = (3x)^2 = 9x^2 \qquad u' = 18x$

$v = \frac{1}{-2} \cdot e^{-2x} \qquad v' = e^{-2x}$

$$\int_0^1 u(x) \cdot v'_{dx} = \overset{u}{9x^2} \cdot \cancel{e^{-2x}} \overset{v}{-\frac{1}{2} e^{-2x}}\Big|_0^1 - \int_0^1 \overset{u'}{18x} \cdot \overset{v = -\frac{1}{2}e^{-2x}}{e^{-2x}}\, dx$$

6p

$\cancel{-9x^2 2 \frac{1}{2}}$

$$-\frac{9}{2} x^2 \cdot e^{-2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 18x \cdot e^{-2x}\, dx$$

$u = 18x \qquad u' = 18$

$v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \quad v' = e^{-2x}$

$$\int_0^1 u_{(x)} \cdot v'_{(x)dx} = 18x \cdot -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_0^1 - \int 18 \cdot e^{-2x}\, dx$$

6p

$= -9x \cdot e^{-2x} - 18 \int e^{-2x}$

$= -9x \cdot e^{-2x} - 18 \cdot -\frac{1}{2} e^{-2x}$ 5p

$= -9x \cdot e^{-2x} + 9 \cdot e^{-2x}$

$$-\frac{9}{2}x^2 \cdot e^{-2x} - \left(-9x \cdot e^{-2x} + 9 \cdot e^{-2x}\right)$$

$$-\frac{9}{2}x^2 \cdot e^{-2x} + 9x \cdot e^{-2x} - 9 \cdot e^{-2x})$$

$$e^{-2x} \cdot \left(-\frac{9}{2}x^2 + 9x - 9\right) + C$$

$$\left[e^{-2x} \cdot \left(-\frac{9}{2}x^2 + 9x - 9\right)\right]_0^1$$

$$e^{-2\cdot 1} \cdot \left(-\frac{9}{2} \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 9\right) - \left(e^{-2\cdot 0} \cdot \left(-\frac{9}{2} \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 9\right)\right)$$

$$e^{-2} \cdot \left(-\frac{9}{2} + 9 - 9\right) - \left(1 \cdot (-9)\right)$$

$$-e^{-2} \cdot \frac{9}{2} + 9 = \underline{\underline{8{,}39099122\text{5 FE}}}$$

4P

5. a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-x-6}$ $\Bigg|$ $\dfrac{x-3 \;|x=3| = 0}{x^2-x-6 \;|x=3| = 0}$ $\Bigg|$ l'Hospital = gültig

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)'}{(x^2-x-6)'} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\underbrace{2x-1}_{\to 5}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x}{e^x-1}$ $\Bigg|$ $\dfrac{x^2+2x \;|x=0| = 0}{e^x-1 \;|x=0| = 0}$ $\Bigg|$ l'Hospital = gültig

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2x)'}{(e^x-1)'} = \frac{\overbrace{2x+2}^{\to 0}}{\underbrace{e^x}_{\to 1}} = 2$$

1/5