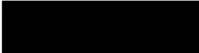
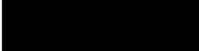
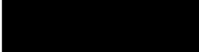


Julia Loutchko
BHT Berlin / FB II

Klausur „Mathematik 2/ TI“ (SS 2016, 19.07.2016)

Vorname:  _____
Name:  _____
Matr.-Nr.:  _____
Letzter Prüfungsversuch: ja nein

Wichtige Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die bei den Aufgaben angegebenen Punktzahlen entsprechen in etwa der Zeit in Minuten, die Sie maximal zur Bearbeitung der Aufgaben verwenden sollten.
- Täuschungsmanöver führen zum sofortigen Ausschluss von der Klausur!
- Teilnahme an der Klausur bedeutet, dass kein Prüfungsrücktritt für Mathematik 2 mehr möglich ist.

Ich habe die Hinweise zur Kenntnis genommen:

 _____

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	5	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	20	20	23	27	90	15		
erreichte Punkte	20	20	23	21	84	15	0	99

1,0
Loutchko

1. **Aufgabe** (20 Punkte). Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. **Aufgabe** (20 Punkte). Für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 8}{(x - 1)^2}$$

bestimmen Sie:

- Definitionsbereich,
- Nullstellen, Schnittpunkte mit der y -Achse,
- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden),
- Asymptotisches Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen,

3. **Aufgabe** (23 Punkte). Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x^2 + 1)(x - 1)}$$

Partialbruchzerlegung durch.

4. **Aufgabe** (27 Punkte). Berechnen Sie das Integral (Partielle Integration):

$$\int_0^1 (3x)^2 \cdot e^{-2x} dx.$$

5. **Zusatzaufgabe** (15 Punkte). Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - x - 6},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{e^x - 1},$$

Matr. 2

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda \cdot E$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda) \cdot (7-\lambda) \cdot (3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 7$$

$$\lambda_3 = 3$$

4P

Eigenvektor für $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 0 \\ 0 & 7-1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I} \quad 0x - 2y + 0z = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$$

$$\text{II} \quad 0x + 6y + 1z = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$$

$$\text{III} \quad 0y + 0y + 2z = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0$$

$$x = 1$$

$$\underline{\underline{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

4P

1

Eigenvektor für $\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I} \quad -6x - 2y + 0z = 0$$

$$\text{II} \quad 0x + 0y + 1z = 0 \quad \rightarrow z = 0$$

$$\text{III} \quad 0x + 0y - 4z = 0 \quad \rightarrow z = 0$$

$$\text{I} \quad -6x = 2y$$

$$y = -3x$$

$$\vec{v}_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \text{für } \alpha = 1 \right.$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor für $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I} \quad -2x - 2y + 0z = 0$$

$$\text{II} \quad 0x + 4y + z = 0$$

$$\text{III} \quad 0 = 0$$

$$\text{II} \quad z = -4y$$

$$\vec{v}_3 = \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \left| \text{für } \beta = 1 \right.$$

$$\text{I} \quad -2x = 2y$$

$$\text{I} \quad y = -x$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ja, die Matrix ist diagonalisierbar, da die geometrische Vielfachheit und die algebraische Vielfachheit gleich 3 sind.

$$2) \quad a) \quad f(x) = \frac{2x^3 - 8}{(x-1)^2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{1\}} \quad 3P$$

b) Nullstellen

Die Funktion wird Null, wenn der Zähler 0 ist.

$$2x^3 - 8 = 0 \quad | +8$$

$$2x^3 = 8 \quad | :2$$

$$x^3 = 4 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$x = \underline{\underline{\sqrt[3]{4}}} \quad 3P$$

Schnittpunkt mit der x -Achse

Bei dem Schnittpunkt mit der x -Achse ist $x=0$

$$\frac{2 \cdot (0)^3 - 8}{(0-1)^2} = \frac{-8}{1} = \underline{\underline{-8}} \quad 3P$$

c) ~~Polynom~~ ~~$\frac{2x^3-8}{x^2-2x+1}$~~

Polynom: $x = -1$

3P

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 8}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 \left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \cdot \left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 \cdot \left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \cdot \left(2 - \frac{8}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right)} = -\infty$$

d) im Unendlichen

$$\frac{2x^3 - 8}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 8 : (x^2 - 2x + 1) = 2x + 4 + \frac{6x - 12}{(x-1)^2} \\ - 2x^3 - 4x^2 + 2x \\ \hline 4x^2 - 2x - 8 \\ 4x^2 - 8x + 4 \\ \hline 6x - 12 \end{array}$$

$$\underbrace{2x+9}_{p(x)} + \frac{6x-12}{\underbrace{(x-1)^2}_{r(x)}}$$

$\gamma = p(x)$

Asymptote = 2x+9

↓
Schreibe Asymptote

✳

$$3. \quad \frac{2x-1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Nullstellen von Nenner

$$\underline{x_1 = 1}$$

$$\underline{x_2 = x^2+1}$$

↳ komplexe Nullstellen

$$\frac{A \cdot (x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{(Bx+C) \cdot (x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Koeffizientenvergleich

$$\frac{Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+1)}$$

Koeffizientenvergleich

$$x^2 \cdot (A+B) = x^2 \cdot 0$$

$$x^1 \cdot (C-B) = x \cdot 2$$

$$x^0 \cdot (A-C) = x^0 \cdot -1$$

$$\text{I } A+B=0$$

$$\text{II } C-B=2$$

$$\text{III } A-C=-1$$

$$\text{I } A=-B$$

$$\text{III } -B-C=-1$$

$$-C=-1+B$$

$$C=1-B$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{II} \quad \cancel{A+B} \quad -B - (1-B) = -1 \\ \quad \quad \quad -B - 1 + B = -1 \\ \quad \quad \quad -1 = -1 \end{array} \right)$$

$$\text{II} \quad 1-B-B=2 \quad (\cancel{A}-1)$$

$$-B-B=2-1$$

$$-2B=1$$

B	$= -\frac{1}{2}$	$\frac{2x-1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{(x+1)^2}$ ✓
A	$= \frac{1}{2}$	
C	$= \frac{3}{2}$	

$$g) \int_0^1 (3x)^2 \cdot e^{-2x} dx$$

$$\int_0^1 (3x)^2 \cdot e^{-2x} dx$$

$$u = (3x)^2 = 9x^2 \quad \dot{u} = 18x$$

$$v = \frac{1}{-2} \cdot e^{-2x} \quad \dot{v} = e^{-2x}$$

$$\int_0^1 u \dot{v} - v \dot{u} = 9x^2 \cdot \cancel{e^{-2x}} - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 18x \cdot e^{-2x} dx$$

6p

$$+ 9x^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{9}{2} x^2 \cdot e^{-2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 18x \cdot e^{-2x} dx$$

$$u = 18x \quad \dot{u} = 18$$

$$v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \quad \dot{v} = e^{-2x}$$

$$\int_0^1 u \dot{v} - v \dot{u} = 18x \cdot -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 18 \cdot e^{-2x} dx$$

6p

$$= -9x \cdot e^{-2x} - 18 \int e^{-2x}$$

$$= -9x \cdot e^{-2x} - 18 \cdot -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

5p

$$= -9x \cdot e^{-2x} + 9 \cdot e^{-2x}$$

$$-\frac{9}{2}x^2 \cdot e^{-2x} - (-9x \cdot e^{-2x} + 9 \cdot e^{-2x})$$

$$-\frac{9}{2}x^2 \cdot e^{-2x} + 9x \cdot e^{-2x} - 9 \cdot e^{-2x}$$

$$e^{-2x} \cdot \left(-\frac{9}{2}x^2 + 9x - 9\right) + C$$

$$\left[e^{-2x} \cdot \left(-\frac{9}{2}x^2 + 9x - 9\right) \right]_0^1$$

$$e^{-2 \cdot 1} \cdot \left(-\frac{9}{2} \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 9\right) - \left(e^{-2 \cdot 0} \cdot \left(-\frac{9}{2} \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 9\right)\right)$$

$$e^{-2} \cdot \left(-\frac{9}{2} + 9 - 9\right) - (1 \cdot (-9))$$

$$-e^{-2} \cdot \frac{9}{2} + 9 = \underline{\underline{8,390991225 \text{ FE}}}$$

4P

$$5. a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6} \quad \left| \begin{array}{l} x-3 \quad |x=3|=0 \\ x^2-x-6 \quad |x=3|=0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{L'Hospital} \\ = \text{g\u00fcltig} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)'}{(x^2-x-6)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{5} = \underline{\underline{0,2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{e^x-1} \quad \left| \begin{array}{l} x^2+2x \quad |x=0|=0 \\ e^x-1 \quad |x=0|=0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{L'Hospital} \\ = \text{g\u00fcltig} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+2x)'}{(e^x-1)'} = \frac{2x+2}{e^x} = \underline{\underline{2}}$$

15

