Julia Loutchko
BHT Berlin / FB II

Klausur „Mathematik 2/ TI " (SS 2016, 19.07.2016)

Vorname:
Name:
Matr.-Nr.: [redacted]

Letzter Prüfungsversuch: ☐ ja ☒ nein

Wichtige Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten.**
- Die bei den Aufgaben angegebenen Punktzahlen entsprechen in etwa der Zeit in Minuten, die Sie maximal zur Bearbeitung der Aufgaben verwenden sollten.
- Täuschungsmanöver führen zum sofortigen Ausschluss von der Klausur!
- Teilnahme an der Klausur bedeutet, dass kein Prüfungsrücktritt für Mathematik 2 mehr möglich ist.

Ich habe die Hinweise zur Kenntnis genommen:

[redacted]

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	5	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	20	20	23	27	90	15		
erreichte Punkte	16	13	7	2	38	0	2	40

4,0

1. Aufgabe (20 Punkte). Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.
Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe (20 Punkte). Für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 8}{(x-1)^2}$$

bestimmen Sie:

a) Definitionsbereich,
b) Nullstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse,
c) Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden),
d) Asymptotisches Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen,

3. Aufgabe (23 Punkte). Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x^2+1)(x-1)}$$

Partialbruchzerlegung durch.

4. Aufgabe (27 Punkte). Berechnen Sie das Integral (Partielle Integration):

$$\int_0^1 (3x)^2 \cdot e^{-2x}\, dx.$$

5. Zusatzaufgabe (15 Punkte). Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-x-6},$$

$$b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{e^x-1},$$

[redacted]

Mathe 2 - Klausur 19.07.16

1.)

Eigenwerte $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Nach Sarrus Aufgelöst:

$$(1-\lambda) \cdot (7-\lambda) \cdot (3-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 3$$

4P

Eigenvektor $\lambda_1 = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{matrix}$$

Nun bilde ich das Kreuzprodukt der ersten beiden Zeilen

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 6 - (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_1} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor $\lambda_2 = 7$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{matrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - (-6) \cdot 1 \\ -6 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \beta \begin{pmatrix} -2 \\ +6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.)
Eigenvektor $\lambda_3=3$

$$A_3=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{matrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1-0\cdot 4\\ 0\cdot 0-(-2)\cdot 1\\ -2\cdot 4-(-2)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ -8\end{pmatrix}$$

$$\vec{e_3}=\mu\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ -8\end{pmatrix}$$

2.)

$$f(x)=\frac{2x^3-8}{(x-1)^2}$$

a)
$\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 3p

b) Nullstellen

$f(x)=0$

$$\frac{2x^3-8}{(x-1)^2}=0 \quad |\cdot(x-1)^2$$

$$2x^3-8=0 \quad |+8$$

$$2x^3=8 \quad |:2$$

$$x^3=4 \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$x=\underline{\underline{1{,}587}}$$ 3p

Schnittpunkte y-Achse

$f(0)$

$$f(0)=\frac{2\cdot 0^3-8}{(0-1)^2}$$

$$=\frac{-8}{1}$$

$$=\underline{\underline{-8}}$$ 3p

[redacted]

Mathe 2 - Klausur 19.07.16

2c) Polgerade liegt bei $x=1$ 4p

2d)

$$f(x) = \frac{2x^3-8}{(x-1)^2}$$

$$\cancel{\frac{2x^3-8}{x^2+2x+1}}$$

$$= \frac{2x^3}{(x-1)^2} - \frac{8}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3}{x^2+2x-1^2} - \frac{8}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3}{2x^2+1} - \frac{8}{(x-1)^2}$$

$= -\frac{8}{(x-1)^2}$ ← geht gegen Null bei $x \to \infty$

$= \underline{\underline{0}}$ 0p

[redacted]

3)

$F(x) = \frac{2x-1}{(x^2+1)(x-1)}$

$\boxed{A_1x + A_2}$

$\frac{2x-1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x^2+1} - \frac{B}{x-1} \quad | \cdot$

$2x-1 = \frac{A \cdot \cancel{(x^2+1)}(x-1)}{\cancel{x^2+1}} - \frac{B \cdot (x^2+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$

$2x-1 = A(x-1) - B(x^2+1)$

~~Koeffizientenvergleich~~

$2x-1 = A(x-1) - B(x^2+1)$

$2x-1 = Ax - A - Bx^2 + B$

Koeffizientenvergleich

6P

$x^0: -A + B = -1$

$x^1: A = 2$

$x^2 = -B = 0$

1P

$\underline{A=2}$

$\underline{B=0}$

$\frac{2x-1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2+1}$?

7P

[redacted]

Mathe C-Klausur 19.07.16

4.) Partielle Integration

$$\int u v' dx = uv - \int v u' dx$$

$$\int (3x)^2 \cdot e^{-2x} dx \begin{bmatrix} u = \overset{9}{3x^2} & u' = 6x \\ v = e^{-2x} & v' = e^{-2x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\overset{9}{3}x^2 \cdot e^{-2x} - \int e^{-2x} \cdot 6x \cdot dx$$