Julia Loutchko
BHT Berlin / FB II

Klausur „Mathematik 2/ TI " (SS 2015, 28.07.2015)

Vorname: [redacted]
Name:
Matr.-Nr.:

Letzter Prüfungsversuch: ☐ ja ☒ nein

Wichtige Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die bei den Aufgaben angegebenen Punktzahlen entsprechen in etwa der Zeit in Minuten, die Sie maximal zur Bearbeitung der Aufgaben verwenden sollten.
- Täuschungsmanöver führen zum sofortigen Ausschluss von der Klausur!
- Teilnahme an der Klausur bedeutet, dass kein Prüfungsrücktritt für Mathematik 2 mehr möglich ist.

Ich habe die Hinweise zur Kenntnis genommen:

(U[redacted]

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	5	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	20	25	25	20	90	15		
erreichte Punkte	12	~~16~~ 21	4	19		4	7	67

2,3

1. Aufgabe (20 Punkte). Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.
Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe (25 Punkte). Für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 1}$$

bestimmen Sie:

a) Definitionsbereich,
b) Nullstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse,
c) Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden),
d) Asymptotisches Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen,
e) relative Extremwerte (Maxima und Minima),
f) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

3. Aufgabe (25 Punkte). Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}$$

Partialbruchzerlegung durch.

4. Aufgabe (20 Punkte). Berechnen Sie das Integral (Partielle Integration):

$$\int_0^3 2x \cdot e^{-x} \, dx.$$

5. Zusatzaufgabe (15 Punkte). Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a) \ \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\ln x}{x^2 + 5x - 14},$$

$$b) \ \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x + 7}{x^2 + x - 5}.$$

[redacted]

28.07.15

① $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)\cdot((3-\lambda)\cdot 1 - 0) \qquad (3-\lambda)^2(1-\lambda)$

Eigenwert $= \lambda_1 = 3$ 3p

$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 3-3 & 4 & -2 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \alpha$

$\Longrightarrow \cancel{4y -}$

$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$4y - 2z = 0$

$z = 0$

$-2z = 0$ 6p

$\Longrightarrow$ Eigenvektor $\vec{\lambda_1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist nicht diagonalisierbar, da die ~~algebraische~~ ~~Viel~~ arithmetische Vielfachheit, nicht der geometrischen Vielfachheit entspricht.   3p

②

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x-1}$

a) $D = \{x, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$ 2p

b) Die Nullstelle einer gebroche Rationalen Funktion, ist die Nullstelle des Zählerpolynoms.

$\Rightarrow$ es sei $2x^2 - 8 = 0 \quad |:2$

$x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

Schnittpunkt mit der Y-Achse $f(0)$

$f(0) = \dfrac{0-8}{-1} = 8 \Rightarrow$ Der Schnittpunkt mit der Y-Achse liegt bei $(0|8)$

5p

c) Die Polstelle liegt bei $x=1$, damit besteht eine Definitionslücke. Die senkrechte Asymptote liegt dem entsprechend auch bei $x=0$.

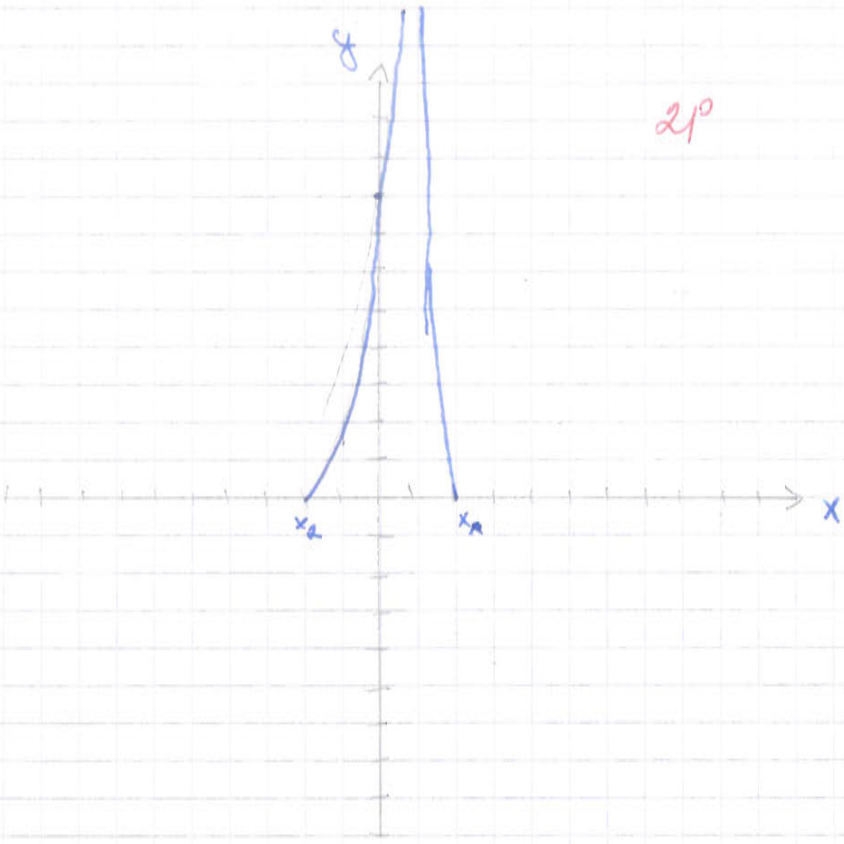
3p

d.) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-8}{x-1}$ für $x > 1$ ~~f(∞)→∞~~ geht die Funktion gegen ∞

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-8}{x-1}$ für $x < 1$ geht die Funktion gegen unendlich

2p

f.)



2p

e.)

$f(x) = \frac{2x^2-8}{x-1}$

$u = 2x-8$ $\quad v = x-1$

$u' = 1$ $\quad v' = 1$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{1\cdot(x-1) - 1(2x-8)}{1}$ $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$u' = -x-9$ $\quad v' = 1$

$u'' = -1$

$\left(\frac{u'}{v'}\right)'' = -1-(-x)-9$

2/5

[redacted]

$f'(x_0) = -x-9 = 0 \Rightarrow$ es existieren extrema

$x_1 = -9$

$f''(x_1) = x - 10 = -9 - 10 = -19 \Rightarrow$ es existiert ein Maximum

21°

~~3.~~

~~1~~

4.

$$\int_0^3 2x \cdot e^{-x}\, dx = \left[u = -x \quad \frac{du}{dx} = -1 \quad dx = -\frac{du}{1} \right]$$

$$= -\int_0^3 -2u \cdot e^u \, du = -\left(-\frac{2u^2}{2} \cdot e^u \right)$$

$$= -\left(-\frac{2u^2}{2} \cdot e^u \right)\Big|_0^{-3} = -\left(\frac{-2 \cdot 0}{2} \cdot e^0 \right) + \left(\frac{-2 \cdot -3^2}{2} \cdot e^{-3} \right) = -1 + -9 \cdot \cancel{0{,}0498}\, e^{-3}$$

$$\approx -1{,}448$$

3 $\cancel{\dfrac{x^2+3}{x^3+x^2+x+1}}$

5.) a) $\lim_{x \to 2} = \dfrac{(x-2)\ln x}{x^2+5x-14}$

b.) $\lim_{x \to \infty} = \dfrac{x^2+6x+7}{x^2+x-5} = \dfrac{7}{5}$

$= \left[\frac{0}{0} \right]$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$f(x) = (x-2) \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}(x-2) \cdot 1 + \ln x$

$g'(x) = 2x + 5$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{x}(x-1)}{2x+5} = \dfrac{1}{18}$

4p

$$\int_0^3 2x\cdot e^{-x}\,dx = \left[\begin{matrix} u=-x \\ \frac{du}{dx}=-1 \quad dx=\frac{du}{-1}\end{matrix}\right] =$$

$$-\int_0^3 -2u\cdot e^{u}\,du \qquad \begin{matrix} o = e^{u} \\ p = -2u \end{matrix}$$

$$\int o'\cdot p = o\cdot p - \int o\cdot p' = e^{u}\cdot -2u - \int e^{u}\cdot -2\,du$$

$$= e^{u}\cdot -2u + 2\int e^{u}\,du$$

$$= e^{u}\cdot -2u + 2e^{u} + C$$

$$\Rightarrow \int_0^3 -2u\cdot e^{u}\,du \Big|_0^{-3} = (\underbrace{e^{0}\cdot -2\cdot 0 + 2\cdot e^{0}}_{=2}) - (e^{-3}\cdot -2\cdot(-3) + 2\cdot e^{-3})$$

$$= (0) - (6e^{-3} + 2e^{-3}) \quad +2$$

19p

3.)

$$f(x) = \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x+1)^2}$$

$$\frac{A}{(x^2+1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)} = \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x+1)^2} \quad \Big| \cdot (x^2+1)(x+1)^2$$

$$A(x+1)^2 + B(x^2+1)(x+1) + C(x^2+1)(x+1) = x^2+3$$

$$Ax^2 + 2Ax + A + Bx^3 + Bx + Bx^2 + B + Cx^3 + Cx + Cx^2 + C = x^2+3$$

x^3 : $B + C = 0$

x^2 : $A + B + C = 1$

$x^1 = 2A + B + C = 0$

$x^0 = A + B + C = 3$

4p

$(A+B+C=1) \neq (A+B+C=3)$

Keine ~~rt~~ relle Lösung möglich.

[redacted]

2.) e.) $\frac{2x-8}{x-1} = f(x)$ $\quad u = 2x-8 \quad v = x-1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad u' = 2 \quad\quad v' = 1$

$$f'(x) = \frac{2(x \mp 1) - (2x-8)\cdot 1}{1^2} = \frac{2x \mp 2 - 2x - 8}{1^2}$$

$$= \frac{0 - 10}{1} = -10$$

$f''(x) = 0$

$\Rightarrow$ Da $f''(x) = 0$ gibt es keine Extrema.

5p

5/5