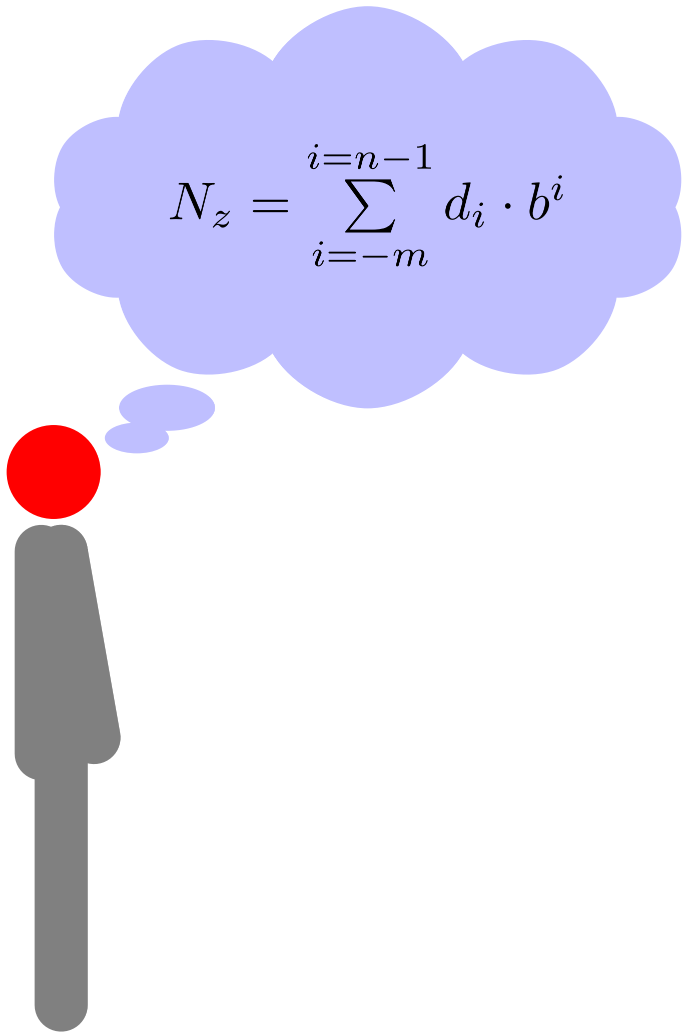
Grundlagen digitaler Systeme (GDS)
Aufgabensammlung - Teil 3, 01.10.2021, WiSe 2021/22

Thema:
Zahlendarstellung, Zahlensysteme und einfache Arithmetik

Aufgabensammlung - Teil 3



1 Einleitung

Information und Daten sind zentrale Begriffe der Informatiktechnik. Für den Begriff Information gibt es keine präzise Definition, man kann ihn aber über Eigenschaften beschreiben. Informationen können dargestellt (Signale, Zeichen, Sprache, ..) und verarbeitet (Ein/Ausgeben, Kombinieren, Speichern Übermitteln, ..) werden. Sie benötigen keinen fixierten Träger, sie altern nicht und sind fast beliebig kombinierbar. Eine Information besteht aus mindestens drei Teilen, einem syntaktischen Teil (zulässige Struktur), einem semantischen Teil (Bedeutung der Information) und einem pragmatischen Teil (Zweck der Information und erhoffte Reaktion).

Daten sind nach DIN 44.300 Zeichen oder kontinuierliche Funktionen, die Informationen zur Verarbeitung auf der Basis von bekannten oder unterstellten Vereinbarungen darstellen.

Für die moderne Datenverarbeitung muss folglich die Information an das Datenverarbeitungssystem angepasst werden. In diesem Zusammenhang ist von Bedeutung:

- arithmetische Operanden für numerische Berechnungen
  - natürliche Zahlen
  - ganze Zahlen
  - reelle Zahlen
  - komplexe Zahlen
- Zeichen für die Ein- und Ausgabe von Informationen
  - Buchstaben
  - Ziffern
  - Sonderzeichen
  - Steuerzeichen für die Steuerung von Geräten

Wie die o.g. Zahlen- und Zeichensysteme aufgebaut sind und wie sie verwendet werden, wird in den folgenden Kapiteln beschrieben. Dabei werden Zahlensysteme wiederholt, die auch in anderen Lehrgebieten eine Rolle spielen.

2 Stellenwertsystem

Wie aus der Mathematik bekannt ist, werden Zahlen nach Regeln und Interpretationsvorschriften, die im Stellenwertsystem festgelegt sind, dargestellt. In einem solchen System hängt die Wertigkeit einer Ziffer von ihrer Position innerhalb einer Zahl ab.

Prinzip: $N_z = d_{n-1} \cdot b^{n-1} + d_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0$

$$\begin{aligned} d_i &: \text{ganzzahliger Koeffizient (Ziffer)},\ d_i \in \{0, 1, \ldots, z-1\} \\ b &: \text{ganzzahlige Basis}, b \geq 2 \\ n &: \text{Stellenzahl} \\ N_z &: \text{Wert der n-stelligen Zahl zur Basis z} \end{aligned}$$

Vorzeichenlose Zahlen werden durch eine n-stellige Ziffernreihe dargestellt. Jeder Position i mit $0 \leq i \leq n-1$ innerhalb der Ziffernreihe $d_{n-1}\ d_{n-2} \ldots d_1\ d_0$ ist ein Stellenwert zugeordnet.

Dezimales Zahlensystem N_{10}

Basis:	$b = 10$
Koeffizient:	$d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Beispiel:	$N_{10} = 1801$ $(= 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0)$

Duales Zahlensystem N_2

Basis:	$b = 2$
Koeffizient:	$d_i \in \{0, 1\}$
Beispiel:	$N_2 = 1101$ $(= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10})$

Mit $n = 4$ Ziffern lässt sich im dezimalen Zahlensystem der Zahlenwert $N_{10} = 9999$ darstellen. Im dualen Zahlensystem sind mit 4 Ziffern der dezimale Zahlbereich bis $N_{10} = 15$ darstellbar. Um den gleichen Zahlenraum des Dezimalsystems in einer Binärdarstellung abzubilden, sind folglich mehr Ziffern notwendig.

$$\text{Zifferanzahl: } n = 4 \mapsto N_2 \Rightarrow 15_{10}$$

$$\text{Zifferanzahl: } n = 8 \mapsto N_2 \Rightarrow 511_{10}$$

Gebräuchliche Basen sind $b = 2, 8, 10$ und 16. Das Zahlensystem wird entsprechend der durch die Basis gegebenen Codierung als Binär-, Oktal-, Dezimal- oder Hexadezimal-System bezeichnet. In der folgenden Tabelle sind die vier gebräuchlichsten Zahlensysteme mit ihren Basen und Alphabeten aufgelistet.

Tabelle 1: Zahlenalphabet zur Basis b.

Zahlensystem	**Basis b**	**Zahlenalphabet** d_i
Binär	2	$\{0, 1\}$
Oktal	8	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Dezimal	8	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Hexadezimal	16	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Jede Hexadezimalziffer wird in binärer Darstellung durch vier Bits dargestellt. Im Folgenden wird jedoch das Binärsystem betrachtet.

Erweiterung der formalen Beschreibung des Stellenwertsystems auf Zahlen mit Nachkommastellen (und Vorzeichen) führt zu der Verallgemeinerung:

$$N_z = d_{n-1} \cdot b^{n-1} + d_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0 + d_{-1} \cdot b^{-1} + \ldots + d_{-m} \cdot b^{-m}$$

Dabei ist n die Anzahl der Vorkommastellen und m die Anzahle der Nachkommastellen. Das jeweilige Zahlensystem wird markiert, indem der Wert der Basis unten rechts an die Zahl angehängt wird. Ist keine Basis explizit angegeben, so handelt es sich um eine Zahl im Dezimalsystem.

3 Binärkodierung für Zahlen

Für die Datenverarbeitung nimmt, ausgehend von Funktionsprinzip eines Computers, das Rechnen mit Binärzahlen (auch Dualzahlen genannt) eine zentrale Stellung ein. Das Binärsystem baut auf der Basis b = 2 auf. Für die Interpretationsvorschrift gilt :

$$N_z = \sum_{i=-m}^{i=n-1} d_i \cdot b^i \quad \text{mit} \quad d_i \in \{0, 1\},\ b = 2$$

Tabelle 2: Zahlen zur Basis 10 und zur Basis 2

Position i	**Potenz dezimal**	**Dezimalzahl**	**Potenz binär**	**Dezimalzahl**
5	10^5	100000	2^5	32
4	10^4	10000	2^4	16
3	10^3	1000	2^3	8
2	10^2	100	2^2	4
1	10^1	10	2^1	2
0	10^0	1	2^0	1
-1	10^{-1}	0,1	2^{-1}	0,5
-2	10^{-2}	0,01	2^{-2}	0,25
-3	10^{-3}	0,001	2^{-3}	0,125
-4	10^{-4}	0,0001	2^{-4}	0,0625
-5	10^{-5}	0,00001	2^{-5}	0,03125

Um eine Zahl aus dem Dezimalsystem in das Dualsystem zu wandeln, muss diese in Potenzen von 2 zerlegt werden. Eine Möglichkeit dazu ist die **Potenzmethode**. Das Verfahren beruht darauf, dass man die höchstwertige Ziffer durch Division mit der höchsten Potenz bestimmen kann. Für

$$N_z = d_{n-1} \cdot b^{n-1} + d_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{N_z}{b^{n-1}} &= d_{n-1} \cdot \frac{b^{n-1}}{b^{n-1}} + d_{n-2} \cdot \frac{b^{n-2}}{b^{n-1}} + \ldots + d_1 \cdot \frac{b^1}{b^{n-1}} + d_0 \cdot \frac{b^0}{b^{n-1}} \\ &= d_{n-1} + \frac{d_{n-2}}{b} + \ldots + \frac{d_1}{b^{n-2}} + \frac{d_0}{b^{n-1}} \end{aligned}$$

Da d_i stets kleiner als die Basis b ist, sind alle Terme außer dem ersten kleiner als 1. Dadurch erhält man d_{n-1} aus N_z durch ganzzahlige Division (Division ohne Rest) mit b^{n-1}. Zieht man anschließend $d_{n-1}\ b^{n-1}$ von N_z ab, so kann man aus dem Rest die nächste Ziffer bestimmen. Für eine beliebige Basis b kann man den Algorithmus wie folgt formulieren:

1. Eingabe der zu konvertierenden Zahl N_z, der gewünschten Stellenzahl n und der Basis b
2. $j = n - 1$
3. durch ganzzahlige Division mit b^j erhält man $d_j = \frac{N_z}{b^j}$
4. von der Zahl N_z wird $a_j \cdot B^j$ subtrahiert $N_z = N_z - d_j \cdot B^j$

5. $j = j - 1$
6. falls j größer oder gleich 0 ist, wird ab Schritt 3) der Rechenablauf wiederholt
7. Ausgabe der konvertierten Zahl $(d_{n-1}, d_{n-2}, \ldots, d_1, d_0)_b$

Beispiel: Die Zahl 21_{10} soll in ein 8-stellige ($n = 8$) Dualzahl gewandelt werden.

j	Division	Ergebnis	Subtraktion	Ziffernwert	Dualpotenz
7	$21/2^7$	0	$21 - 0 \cdot 2^7 = 21$	$d_7 = 0$	2^7
6	$21/2^6$	0	$21 - 0 \cdot 2^6 = 21$	$d_6 = 0$	2^6
5	$21/2^5$	0	$21 - 0 \cdot 2^5 = 21$	$d_5 = 0$	2^5
4	$21/2^4$	1	$21 - 1 \cdot 2^4 = 5$	$d_4 = 1$	2^4
3	$5/2^3$	0	$5 - 0 \cdot 2^3 = 5$	$d_3 = 0$	2^3
2	$5/2^2$	1	$5 - 1 \cdot 2^2 = 1$	$d_2 = 1$	2^2
1	$1/2^1$	0	$1 - 0 \cdot 2^1 = 1$	$d_1 = 0$	2^1
0	$1/2^0$	1	$1 - 1 \cdot 2^0 = 0$	$d_0 = 1$	2^0

Somit folgt für $21_{10} = N_2 = \langle d_7, \ldots, d_0 \rangle = 00010101_2$.

Während man bei der Potenzmethode zunächst die höchstwertige Ziffer bestimmt, kann man mit der so genannten **Restwertmethode** die Umwandlung mit der jeweils niederwertigste Ziffer beginnen. Dazu formt man die Zahlendarstellung zunächst nach dem **Horner-Schema** durch fortgesetztes Ausklammern um:

$$\begin{aligned} N_z &= d_{n-1} \cdot b^{n-1} + d_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0 \\ &= (d_{n-1} \cdot b^{n-2} + d_{n-2} \cdot b^{n-3} + \ldots + d_1 \cdot b^0) \cdot b + d_0 \cdot 1 \\ &\vdots \\ &= \Big\{ \Big[(\ldots d_{n-1} \cdot b + d_{n-2} \cdot) \cdot b^{n-2} + \ldots + d_2 \Big] \cdot b + d_1 \Big\} \cdot b + d_0 \end{aligned}$$

Division durch b liefert jetzt einen ganzzahligen Anteil

$$\frac{N_z}{b} = [(\ldots d_{n-1} \cdot b + d_{n-2} \cdot) \cdot b^{n-2} + \ldots + d_2] \cdot b + d_1$$

und den Rest d_0. Durch fortgesetzte Division des jeweils verbleibenden ganzzahligen Anteils lassen sich so nacheinander die Ziffern als Restwerte bestimmen.

Beispiel: Die Zahl 12_{10} soll in ein 4-stellige ($n = 4$) Dualzahl gewandelt werden.

$N_{10} : 2 =$	Rest	N_2	$\Rightarrow d_i \cdot b^{n-1}$
$12 : 2 = 6$	Rest	0	$\Rightarrow 0 \cdot 2^0$
$6 : 2 = 3$	Rest	0	$\Rightarrow 0 \cdot 2^1$
$3 : 2 = 1$	Rest	1	$\Rightarrow 1 \cdot 2^2$
$1 : 2 = 0$	Rest	1	$\Rightarrow 1 \cdot 2^3$

$$N_2 = 1100$$

$$\begin{aligned} N_{10} &= \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0 \\ &= 8 + 4 = 12 \end{aligned}$$

Die Umwandlung einer Binärzahl in das Dezimalsystem - da die Potenz bekannt ist - ist eine einfache Addition.

4 Aufgaben zur Zahlendarstellung und Zahlensystemen

Aufgabe 1 Dezimalzahlen und Binärzahlen

Berechnen Sie für folgende Dezimalzahlen die entsprechende Binärdarstellung!
Bei Zahlen mit Nachkommastellen ist eine maximale Ungenauigkeit von 5% erlaubt.

a) $25_{10} =$

b) $1,66_{10} \approx$

c) $2.8125 \approx$

Aufgabe 2 Vorzeichenbehaftete Zahlen (1)

Führen Sie die folgenden Rechnungen jeweils im Einer- und Zweierkomplement durch. Die Wortlänge betrage dabei 8 Bit. Geben Sie auch den dezimalen Wert des Resultats an.

a) $13 + 21$

b) $125 + 3$

c) $31 - 19$

d) $-87 - 55$

e) $-11 - 21$

Aufgabe 3 Vorzeichenbehaftete Zahlen (2)

Führen Sie die folgenden Rechnungen jeweils im Einer- und Zweierkomplement durch. Die Wortlänge betrage dabei 8 Bit. Geben Sie auch den dezimalen Wert des Resultats an.

a) $12 + 27$

b) $127 + 1$

c) $33 - 17$

d) $-88 - 77$

e) $-12 - 14$

Aufgabe 4 Vorzeichenbehaftete Festkomma-Zahlen

Führen Sie die Addition 1,5+3,375 für 8-Bit-Festkommazahlen mit drei Nachkommastellen im Zweierkomplement durch! Geben Sie auch den dezimalen Wert des Resultats an!

Aufgabe 5 Bewertung der beiden Zahlendarstellungen

In modernen Schaltungen wird praktisch nur noch das Zweierkomplement verwendet. Worin liegt der Vorteil dieser Darstellung?