

Formelsammlung zur Mathematik 1

Bachelor Technische Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Marlene Müller
marlene.mueller@beuth-hochschule.de

Version: 6. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	2
1.1	<i>pq</i> -Formel	2
1.2	Fakultät, Binomialkoeffizienten	2
1.3	Binomische Formeln und Binomischer Lehrsatz	2
2	Logik	3
2.1	Wahrheitstabellen und Priorisierung der Junktoren	3
2.2	Regeln der Aussagenlogik	3
2.3	Ersetzung der binären Junktoren	3
2.4	Quantoren	4
2.5	Regeln der Prädikatenlogik	4
3	Mengen	4
3.1	Mengenrelationen und -operationen	4
3.2	Regeln der Mengenlehre	5
3.3	Potenzmenge und Kartesisches Produkt	5
3.4	Zahlenmengen, Intervalle	5
3.5	Komplexe Zahlen und Grundrechenarten	6
3.6	Mächtigkeit von Mengen	6
4	Analysis	7
4.1	Operationen für reelle Zahlen	7
4.2	Regeln für Potenz- und Wurzeloperationen	7
4.3	Regeln für Logarithmusoperationen	8
4.4	Trigonometrie	8
4.5	Eigenschaften von Funktionen	8
4.6	Einige elementare Funktionen	9
4.7	Polynome	9
4.8	Zahlenfolgen	10
4.9	Rationale Funktionen	11
4.10	Trigonometrische Funktionen	12
4.11	Weitere nützliche Funktionen	13
5	Lineare Algebra	14
5.1	Vektoren	14
5.2	Regeln der Vektoralgebra	14
6	Komplexe Zahlen und Funktionen	15

1 Grundlegendes

1.1 pq-Formel

- ▶ Lösungsformel für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.2 Fakultät, Binomialkoeffizienten

- ▶ Fakultät:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & \text{wenn } n \geq 1. \end{cases}$$

- ▶ Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.3 Binomische Formeln und Binomischer Lehrsatz

- ▶ 1. binomische Formel: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- ▶ 2. binomische Formel: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- ▶ 3. binomische Formel: $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$

- ▶ Binomischer Lehrsatz:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- ▶ Differenz von a und b :

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$$

- ▶ Differenz von a^n und b^n :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}$$

2 Logik

2.1 Wahrheitstabellen und Priorisierung der Junktoren

a	$\neg a$	a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a b$	$a \downarrow b$	$a \oplus b$
	NOT			AND	OR		XNOR	NAND	NOR	XOR
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0

► Priorisierung: \neg vor \wedge vor \vee vor \rightarrow vor \leftrightarrow

2.2 Regeln der Aussagenlogik

- Kommutativgesetz: $a \wedge b \iff b \wedge a$, $a \vee b \iff b \vee a$
- Assoziativgesetz: $a \wedge b \wedge c \iff a \wedge (b \wedge c) \iff (a \wedge b) \wedge c$
 $a \vee b \vee c \iff a \vee (b \vee c) \iff (a \vee b) \vee c$
- Distributivgesetz: $a \vee (b \wedge c) \iff (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
 $a \wedge (b \vee c) \iff (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- Absorption: $a \vee (a \wedge b) \iff a$, $a \wedge (a \vee b) \iff a$
- Komplementarität: $a \wedge \neg a \iff 0$, $a \vee \neg a \iff 1$
- Neutrale Elemente: $a \wedge 1 \iff a$, $a \wedge 0 \iff 0$
 $a \vee 1 \iff 1$, $a \vee 0 \iff a$
- Idempotenz: $a \wedge a \iff a$, $a \vee a \iff a$
- Gesetze von de Morgan: $\neg(a \vee b) \iff \neg a \wedge \neg b$
 $\neg(a \wedge b) \iff \neg a \vee \neg b$

2.3 Ersetzung der binären Junktoren

$$\begin{aligned}
 x \oplus y &\iff \neg(x \leftrightarrow y) \\
 x \downarrow y &\iff \neg(x \vee y) \\
 x | y &\iff \neg(x \wedge y) \\
 x \rightarrow y &\iff \neg x \vee y \\
 x \leftrightarrow y &\iff (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \\
 &\iff (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)
 \end{aligned}$$

2.4 Quantoren

- ▶ Alternative Notation der Quantoren:

$$\bigwedge_x p(x) \iff \forall x : p(x) , \quad \bigvee_x p(x) \iff \exists x : p(x)$$

2.5 Regeln der Prädikatenlogik

- ▶ leere Grundmenge:

$$\begin{aligned} \forall x \in \emptyset : p(x) & \text{ ist wahr} \\ \exists x \in \emptyset : p(x) & \text{ ist falsch} \end{aligned}$$

- ▶ Vertauschen gleicher Quantoren:

$$\begin{aligned} \forall x : \forall y : p(x, y) & \iff \forall y : \forall x : p(x, y) \\ \exists x : \exists y : p(x, y) & \iff \exists y : \exists x : p(x, y) \end{aligned}$$

- ▶ Negation (de Morgan):

$$\begin{aligned} \neg\{\exists x : p(x)\} & \iff \forall x : \neg p(x) \\ \neg\{\forall x : p(x)\} & \iff \exists x : \neg p(x) \end{aligned}$$

3 Mengen

- ▶ Ist a Element von A schreiben wir $a \in A$, sonst $a \notin A : \iff \neg(a \in A)$.
- ▶ Die Menge \emptyset ist die leere Menge, formal gilt: $x \in \emptyset \iff 0$ (also Wahrheitswert 0).

3.1 Mengenrelationen und -operationen

- ▶ A ist eine Teilmenge von B : $A \subseteq B : \iff$ für alle x gilt $(x \in A \rightarrow x \in B)$
- ▶ A und B sind gleich: $A = B : \iff$ für alle x gilt $(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- ▶ Schnittmenge (Durchschnitt) zweier Mengen A und B : $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- ▶ Vereinigung zweier Mengen A und B : $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- ▶ Differenz zweier Mengen A und B : $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- ▶ Komplement (auch: Komplementärmenge) einer Menge A : $\bar{A} := \{x \mid x \notin A\} = G \setminus A$ (wenn G die Grundmenge ($G \supseteq A$) bezeichnet)

3.2 Regeln der Mengenlehre

- ▶ Kommutativgesetz: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
- ▶ Assoziativgesetze: $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
 $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- ▶ Distributivgesetze: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ▶ Absorption: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$
- ▶ Komplementarität: $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = G$
- ▶ Neutrale Elemente: $A \cap G = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup G = G$, $A \cup \emptyset = A$
- ▶ Idempotenz: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
- ▶ de Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3.3 Potenzmenge und Kartesisches Produkt

- ▶ Potenzmenge von G ist die Menge aller Teilmengen von G : $\mathcal{P}(G) := \{A \mid A \subseteq G\}$
- ▶ kartesisches Produkt zweier Mengen A und B : $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- ▶ kartesisches Produkt mehrerer Mengen A_i für $i = 1, 2, \dots, m$:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

3.4 Zahlenmengen, Intervalle

- ▶ natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, mit Null: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ▶ ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$
- ▶ rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- ▶ reelle Zahlen, komplexe Zahlen: \mathbb{R}, \mathbb{C}
- ▶ abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} , offenes Intervall in \mathbb{R} , halboffene Intervalle in \mathbb{R} :

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$$

Anmerkung: statt $(,)$ wird oft auch $], [$ verwendet

- ▶ unendliche Intervalle in \mathbb{R} : $(-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

3.5 Komplexe Zahlen und Grundrechenarten

- ▶ Notation: $z = x + jy$ oder $z = x + yj$ (wobei $j^2 = -1$), d.h. mit Realteil $\text{Re}(z) = x$ und Imaginärteil $\text{Im}(z) = y$
- ▶ Betrag $|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ▶ konjugiert komplexe Zahl $z^* = (x + jy)^* = x - jy$
- ▶ Grundrechenarten für $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

3.6 Mächtigkeit von Mengen

- ▶ Folge benachbarter ganzer Zahlen: $|\{m, m + 1, \dots, n\}| = n - m + 1$

Summenregel: für zwei disjunkte Mengen A, B : $|A \cup B| = |A| + |B|$

allgemeiner für n paarweise disjunkte Mengen A_1, \dots, A_n (falls $A_j \cap A_k = \emptyset$):

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| \quad \text{bzw.} \quad \left| \bigcup_i A_i \right| = \sum_i |A_i|$$

- ▶ Siebformel (Prinzip von Inklusion und Exklusion): $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$

- ▶ daraus folgend weitere Eigenschaften:

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = |A \cup B| - |B|, \quad |\bar{A}| = |G| - |A|$$

- ▶ Produktregel für kartesisches Produkt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

allgemeiner gilt für n Mengen: $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$

Potenzmenge: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- ▶ Permutationen – Anzahl verschiedener Reihenfolgen von n Objekten:

$$|S_n| = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

4 Analysis

4.1 Operationen für reelle Zahlen

- ▶ der Absolutbetrag bzw. Betrag einer reellen Zahl a ist gegeben durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

- ▶ Potenzieren einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit Potenz $b \in \mathbb{N}$: $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_b$

für $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{Z}$ können wir außerdem definieren: $a^0 = 1$, $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

- ▶ das Potenzieren lässt sich auf positive $a, b \in \mathbb{R}$ verallgemeinern
- ▶ Radizieren: falls $a, c \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und $a^b = c$, dann heißt a die b -te Wurzel aus c :

$$a = \sqrt[b]{c} \quad \text{bzw.} \quad a = c^{1/b}$$

- ▶ Logarithmieren: falls $a, c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$ und $a^b = c$, dann heißt b der Logarithmus von c zur Basis a :

$$b = \log_a c$$

speziell:

für die Basis $e = 2.718281828\dots$ (Eulersche Zahl) sprechen wir vom natürlichen Logarithmus und schreiben $b = \ln c$ ($= \log_e c$)

der Logarithmus zur Basis 10 wird auch mit \lg bezeichnet

der Logarithmus zur Basis 2 wird auch mit \lg bezeichnet

4.2 Regeln für Potenz- und Wurzeloperationen

- ▶ für $a, b, r, s \in \mathbb{R}^+$ oder $a, b \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{Z}$:

$$(1) \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(2) \quad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r, \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$(3) \quad (a^r)^s = (a^s)^r = a^{r \cdot s}$$

- ▶ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und natürliche Exponenten $k, m, n \in \mathbb{N}$:

$$(4) \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(5) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$(6) \quad \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

4.3 Regeln für Logarithmusoperationen

► für $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ und $b, c \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(0) \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

$$(1) \quad \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad (c \neq 0)$$

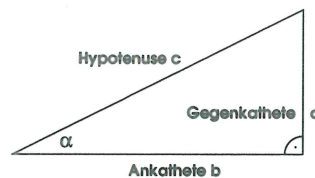
$$(2) \quad \log_a u^c = c \log_a u, \quad \log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

$$(3) \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{Basiswechsel})$$

4.4 Trigonometrie

• trigonometrische Funktionen:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$$



► Gradmaß vs. Bogenmaß:

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha$$

4.5 Eigenschaften von Funktionen

- eine Funktion f heißt monoton wachsend, falls für beliebige $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$, dann heißt f streng monoton wachsend
- eine Funktion f heißt monoton fallend, falls für beliebige $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ gilt sogar $f(x_1) > f(x_2)$, dann heißt f streng monoton fallend
- eine Funktion f ist umkehrbar, falls $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (bzw. die Funktion eindeutig=bijektiv ist); die Umkehrfunktion oder inverse Funktion wird mit f^{-1} bezeichnet.
- Satz: Jede streng monoton wachsende oder streng monoton fallende Funktion ist umkehrbar.
- Nullstelle einer Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ist jede Lösung der Gleichung $f(x) = 0$
- eine gerade Funktion ist eine Funktion f , für die $f(x) = f(-x)$ gilt; eine ungerade Funktion ist eine Funktion f , für die $f(x) = -f(-x)$ gilt

4.6 Einige elementare Funktionen

- ▶ konstante Funktion: $f(x) = b$; lineare Funktion: $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- ▶ Potenzfunktion: $f(x) = ax^n$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ Monotonie der Potenzfunktion für $n \geq 2$:
 für ungerades n ist $f(x) = ax^n$ streng monoton wachsend ($a > 0$) bzw. streng monoton fallend ($a < 0$) auf der ganzen Definitionsmenge \mathbb{R}
 für gerades n gilt:
 für $a > 0$ ist $f(x) = ax^n$ streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ und streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_0^+ ,
 für $a < 0$ ist $f(x) = ax^n$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_0^- und streng monoton fallend auf \mathbb{R}_0^+
- ▶ Wurzelfunktion: $f(x) = a \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$
- ▶ allgemeine Potenzfunktion: $f(x) = ax^r$, $x > 0$, $a \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$
- ▶ Exponentialfunktion: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$
- ▶ Logarithmusfunktion: $f(x) = \log_a(x)$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
- ▶ trigonometrische Funktionen: $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ etc. (vgl. Abschnitt 4.10)

4.7 Polynome

- ▶ eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, und $a_n \neq 0$ heißt Polynom; wir nennen n den Grad oder die Ordnung des Polynoms
- ▶ das Horner-Schema zur Berechnung eines Wertes $p(b)$ hat die Form:

$$\begin{array}{r}
 \hline \hline
 a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0 \\
 \hline
 + \quad \quad \quad a_n b \quad c_{n-1} b \quad \cdots \quad c_2 b \quad c_1 b \\
 \hline
 (\cdot b) \quad c_n = a_n \quad c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \cdots \quad c_1 \quad p(b) \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

- ▶ **Satz**: Die rationalen Nullstellen eines Polynoms $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ findet man unter der Brüchen $\frac{a}{b}$, in denen a ein Teiler von a_0 und b ein Teiler von a_n ist.
- ▶ **Hauptsatz der Algebra**: Jedes Polynom n -ten Grades hat höchstens n reelle Nullstellen.
- ▶ kennen wir die Nullstellen eines Polynoms $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, so können wir das Polynom in der Produktdarstellung angeben:

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r} q(x),$$

wobei x_1, \dots, x_r die Nullstellen des Polynoms $p(x)$ sind, die Potenzen m_1, \dots, m_r die entsprechenden Vielfachen der Nullstellen und q , das keine Nullstellen in \mathbb{R} besitzt

- ▶ Newton'sches Interpolationspolynom für n Punkte (x_i, y_i) mit $i = 1, \dots, n$:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ + c_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Berechnung der Konstanten c_0, \dots, c_{n-1} :

$$\begin{aligned} y_1 = p(x_1) &= c_0 && \Rightarrow c_0 \\ y_2 = p(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_1) && \Rightarrow c_1 \\ y_3 = p(x_3) &= c_0 + c_1(x_3 - x_1) + c_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) && \Rightarrow c_2 \\ &\vdots && \end{aligned}$$

4.8 Zahlenfolgen

- ▶ eine Folge $\{x_n\}$ heißt

<u>monoton wachsend</u>	falls $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
<u>streng monoton wachsend</u>	falls $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
<u>monoton fallend</u>	falls $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
<u>streng monoton fallend</u>	falls $x_n > x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- ▶ eine Folge $\{x_n\}$ heißt beschränkt, falls $x_n \in [a, b]$ für alle Folgeglieder x_n
- ▶ eine Folge $\{x_n\}$ konvergiert gegen den Grenzwert a , Bezeichnung: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, wenn es zu jeder beliebig kleinen vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

- ▶ Satz von Weierstrass: Jede beschränkte, monoton wachsende oder monoton fallende Folge ist konvergent.
- ▶ nicht konvergente Folgen heißen divergent
- ▶ eine Folge $\{x_n\}$ divergiert gegen ∞ , Bezeichnung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, wenn es zu jeder beliebig großen Zahl $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n > K$ für alle $n \geq n_0$; eine Folge $\{x_n\}$ divergiert gegen $-\infty$, Bezeichnung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, wenn die Folge $(-a_n)$ gegen ∞ divergiert
- ▶ Regeln für die Konvergenz:
es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

(1) Addition, Subtraktion, Multiplikation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

(2) gilt $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

(3) für $c \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$

(4) Quadratwurzel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

- ▶ **Satz:** Gegeben seien zwei konvergente Folgen $\{a_n\}$ und $\{c_n\}$ mit demselben Grenzwert a , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. Gilt dann für eine Folge $\{b_n\}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann konvergiert auch $\{b_n\}$ gegen a , d.h. es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Spezielle Zahlenfolgen

- ▶ Eulersche Zahl: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- ▶ für $a > 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- ▶ für $x > 1$ und $k > 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n^k} = \infty$
- ▶ für $a > 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$

Nullfolgen

- ▶ jede gegen 0 konvergierende Folge heißt Nullfolge
- ▶ sei $\{x_n\}$ eine Nullfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$
- ▶ sei $\{x_n\}$ eine Nullfolge mit $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$
- ▶ sei $\{x_n\}$ eine Folge, die gegen ∞ oder gegen $-\infty$ divergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$

4.9 Rationale Funktionen

- ▶ eine rationale Funktion ist der Quotient zweier Polynome:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b^m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$

- ▶ eine rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist an den Nullstellen des Nenners nicht definiert
- ▶ sei x_0 eine Nullstelle von q mit Vielfachem k , ist dann x_0 auch eine Nullstelle von p mit Vielfachen $\ell \geq k$ (der Faktor $(x - x_0)$ kann aus dem Nenner herausgekürzt werden), dann heißt x_0 hebbare Definitionslücke (hebbare Singularität)
- ▶ ist x_0 Nullstelle von q mit Vielfachem k , aber keine Nullstelle von p oder eine Nullstelle von p mit Vielfachen $\ell < k$ (der Faktor $(x - x_0)$ kann nicht aus dem Nenner herausgekürzt werden), dann ist x_0 eine Polstelle

- ▶ die Nullstellen von $r(x)$ sind die Nullstellen von $p(x)$, sofern sie keine hebbaren Definitionslücken oder Polstellen sind
- ▶ ist der Polynomgrad von $p(x)$ größer als der von $q(x)$, kann die rationale Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$ durch ein Polynom angenähert werden, es gilt

$$r(x) = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)}$$

(wobei $s(x)$ und $t(x)$ wieder Polynome sind), Berechnung durch Polynomdivision

4.10 Trigonometrische Funktionen

- ▶ eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn sich ihre Werte in regelmäßigen Abständen wiederholen, d.h. es existiert eine reelle Zahl $T \neq 0$, so dass

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D_f,$$

den Wert T , d.h. den Abstand zwischen dem Auftreten desselben Funktionswertes, nennt man Periode

- ▶ trigonometrische Funktion

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
Definitionsbereich	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x \neq k\pi$
Wertebereich	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Periode	2π	2π	π	π
Symmetrie	ungerade	gerade	ungerade	ungerade
Nullstellen	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
Polstellen	keine	keine	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$

- ▶ einige Rechenregeln:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

- ▶ Polarkoordinaten für den Punkt $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

dann gilt in Polarkoordinaten: $P = (r, \varphi)$ mit $r^2 = a^2 + b^2$, $\tan \varphi = \frac{b}{a}$

4.11 Weitere nützliche Funktionen

► Betragsfunktion

$$|x| = \text{abs}(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften:

- (1) $|-x| = |x|$ (gerade Funktion)
- (2) $|x| + |y| \geq |x + y|$ (Dreiecksungleichung)
- (3) $|x - y| \geq ||x| - |y||$
- (4) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

► Signum-Funktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften:

- (1) $\text{sign}(-x) = -\text{sign } x$ (ungerade Funktion)
- (2) $\text{sign}(x \cdot y) = \text{sign } x \cdot \text{sign } y$
- (3) $x = \text{sign } x \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$

► die Abrundungsfunktion : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist definiert durch:

$$\lfloor x \rfloor = \text{floor}(x) = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

die Aufrundungsfunktion : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist definiert durch:

$$\lceil x \rceil = \text{ceil}(x) = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$$

Eigenschaften:

- (1) $x = \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- (2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil < x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

► die Modulo-Funktion : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist für $m \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\text{mod}_m(x) = x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor m$$

Eigenschaften:

- (1) $0 \leq \text{mod}_m(x) < m$
- (2) $x \equiv_m \text{mod}_m(x)$ (Zahlenkongruenz bzgl. m)

5 Lineare Algebra

5.1 Vektoren

- ▶ Nullvektor: Vektor, der nur aus Nullen besteht;
Skalar: eindimensionaler Vektor ($\in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$)
- ▶ Skalarprodukt (auch inneres Produkt) im \mathbb{R}^n $\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$
- ▶ Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt oder äußeres Produkt) im \mathbb{R}^3

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ für zwei Vektoren gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$ wobei φ den Winkel zwischen den Vektoren \vec{u} und \vec{v} bezeichne (speziell: \vec{u}, \vec{v} heißen orthogonal, wenn $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)
- ▶ die Norm (auch Länge oder Betrag) eines Vektors \vec{u} ist definiert durch $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- ▶ der Abstand (auch Distanz) zwischen zwei Vektoren \vec{u}, \vec{v} ist definiert durch $|\vec{u} - \vec{v}|$
- ▶ ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor
- ▶ Gerade in Parameterform: $g(r) = \vec{u} + r\vec{v}$, $r \in \mathbb{R}$
(der Stützvektor ist \vec{u} und der Richtungsvektor ist \vec{v})

5.2 Regeln der Vektoralgebra

Es seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren und $r, s, t \in \mathbb{R}$ beliebige Skalare.

- ▶ Addition und skalare Multiplikation:

- (1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- (2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- (3) $s(\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} + s\vec{v}$, $(s + t)\vec{u} = s\vec{u} + t\vec{u}$
- (4) $(st)\vec{u} = s(t\vec{u})$, $1\vec{u} = \vec{u}$

- ▶ Skalarprodukt

- (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- (2) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- (3) $(s\vec{u}) \cdot \vec{v} = s(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- (4) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ ($\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ gilt dann und nur dann, wenn $\vec{u} = \vec{0}$)

- ▶ Kreuzprodukt

- (1) $\vec{u} \times \vec{v}$ ist senkrecht zu \vec{u} und \vec{v}
- (2) $\vec{u} \times r\vec{u} = \vec{0}$
- (3) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- (4) $\vec{u} \times (r\vec{v} + s\vec{w}) = r(\vec{u} \times \vec{v}) + s(\vec{u} \times \vec{w})$, $(r\vec{u} + s\vec{v}) \times \vec{w} = r(\vec{u} \times \vec{w}) + s(\vec{v} \times \vec{w})$
- (5) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$

6 Komplexe Zahlen und Funktionen

- ▶ Notation: $z = x + jy$ oder $z = x + yj$ (wobei $j^2 = -1$), d.h. mit Realteil $\operatorname{Re}(z) = x$ und Imaginärteil $\operatorname{Im}(z) = y$
- ▶ als Zeiger bezeichnen wir die grafische Darstellung einer komplexen Zahl
- ▶ Betrag $|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ▶ konjugiert komplexe Zahl $z^* = (x + jy)^* = x - jy$
- ▶ Polarform und Exponentialform $z = x + jy = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$,
Berechnung von r und $\varphi \in [0, 2\pi)$:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y > 0 & \text{(I. Quadrant)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 & \text{(II.+III. Quadrant)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{für } x > 0, y < 0 & \text{(IV. Quadrant)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

- ▶ Grundrechenarten für $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ und $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

- ▶ die n -te Potenz von $z = r e^{j\varphi}$ ist $z^n = r^n \cdot e^{jn\varphi}$ ($n \in \mathbb{N}$)
- ▶ Ergänzung der pq -Formel: Ist $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, dann hat die quadratische Gleichung zwei konjugiert komplexe Lösungen

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm j\sqrt{|D|}$$

- ▶ die n -ten Wurzeln von $a = a_0 e^{j\alpha}$ für $n \in \mathbb{N}$ sind alle $z_k = r e^{j\varphi_k}$ mit

$$r = \sqrt[n]{a_0}, \quad \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- ▶ Hauptwert des natürlichen Logarithmus von $z = r \cdot e^{j\varphi}$ ist

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + j\varphi \quad \text{wobei } \varphi \in [0, 2\pi)$$

die Nebenwerte sind

$$\ln z = \operatorname{Ln} z + k \cdot 2\pi j \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

