Mathematik 1

Bachelor Technische Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Marlene Müller
marlene.mueller@beuth-hochschule.de

Klausur 23. Januar 2018

Name, Vorname: [redacted]

Matrikelnr.: [redacted]

Dritter Versuch? ☐ Ja ☐ Nein

Erlaubte Hilfsmittel: *Formelsammlung (ohne eigene Notizen), ein A4-Blatt mit selbst zusammengestelltem Inhalt, Taschenrechner, permanente Schreibstifte, leere Schreibblätter*

Bitte verwenden Sie keinen Bleistift zum Schreiben und keine Korrekturmittel (Tipp-Ex etc.). Notieren Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedem Blatt, das Sie abgeben. Kennzeichnen Sie bitte auch klar, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Die Bearbeitungszeit beträgt 100 Minuten. Zum Bestehen der Klausur sind 45 Punkte notwendig. Ihre Bonuspunkte werden angerechnet.

Wichtig: Geben Sie bitte bei allen zu berechnenden Größen auch Ihre verwendete Berechnungsformel mit an oder erläutern Sie ggf. kurz Ihren Lösungsweg.

Bitte folgendes Feld für die Auswertung freilassen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	[+Bonus]	Summe
erreichte Punkte	18	12	11	14	8	16	9	88
max. Punkte	21	14	15	19	12	19	[+10]	100

Note: 1,7

Aufgabe 1 (21 P.)

(a) Zeigen Sie, dass der logische Ausdruck $\big(q \wedge (\neg p \rightarrow q)\big) \rightarrow q$ eine Tautologie ist. Führen Sie den Nachweis:

(a1) mit Hilfe einer Wahrheitstabelle (geben Sie alle nötigen Spalten an) und

(a2) durch Anwendung logischer Regeln (benennen Sie alle verwendeten Regeln).

(b) Es seien $a(x)$ und $b(x)$ zwei Prädikate. Verneinen Sie die beiden folgenden Aussagen und formen Sie sie soweit um, dass evtl. Negationszeichen nur noch direkt vor den Prädikaten stehen (benennen Sie wieder die verwendeten Regeln):

(b1) $\forall x : \Big(a(x) \rightarrow b(x)\Big)$

(b2) $\exists x : \Big(\neg\, a(x) \wedge \neg\, b(x)\Big)$

(c) Gegeben seien die reellen Intervalle $A = [-1, 3\,)$, $B = [\,1, 4\,)$ und $C = (-\infty, 0\,]$. Welche Mengen ergeben sich durch die folgenden Operationen?

(c1) $(A \setminus B)$

(c2) $(A \setminus B) \cap C$

Aufgabe 2 (14 P.)

(a) Betrachten Sie den Ausdruck $(2x + y)^7$ mit dem Binomischen Lehrsatz. Wie lautet der Faktor, der vor dem Term x^4y^3 steht?

(b) Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen (denken Sie daran, Ihren Lösungsweg mit anzugeben):

$$\begin{array}{lrcl} \text{(b1)} & \left(e^{-x+5}\right)^2 & = & e^{4-5x} \\ \text{(b2)} & \ln x & = & 4 - 2\ln x \end{array}$$

Aufgabe 3 (15 P.)

(a) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die folgenden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3x \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie nun für $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$:

(b1) die Längen der beiden Vektoren,

(b2) den Winkel zwischen ihnen (im Gradmaß),

(b3) das Kreuzprodukt.

Aufgabe 4 (19 P.)

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden Funktion und bringen Sie das Polynom in die Produktdarstellung. (Denken Sie daran, Ihren Rechenweg mit anzugeben.) Skizzieren Sie auch den Graphen.

$$p(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(b) Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich der folgenden reellen Funktionen an. *Schreiben Sie Ihre Antworten möglichst in die folgende Tabelle.*

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich
(b1) $f(x) = 4\ln(x) - 2$	~~$x \geq 0$~~ $(0, \infty)$ ✓	$(-\infty, +\infty)$ ✓
(b2) $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ✓	$[2, 0)$ f ~~$(2, \infty$ strebt gegen $0)$~~
(b3) $f(x) = \sin(x^3) + 2$	$\mathbb{R}$ ✓	$[-1, 1]$ f

5P.

Aufgabe 5 (12 P.)

Vervollständigen Sie die Tabelle für die gegebenen komplexen Zahlen z. Geben Sie φ dabei bitte im Bogenmaß an. *Schreiben Sie Ihre Antworten möglichst in die folgende Tabelle.*

z	$1 - 3\,\mathrm{j}$	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{j}$	$\sqrt{2}\,\mathrm{j}$
$\operatorname{Im}(z)$	-3 ✓	$\frac{1}{2}$ ✓	$\sqrt{2}$ ✓
z^*	$1 + 3j$ ✓	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} j$ ✓	$-\sqrt{2} j$ ✓
$\lvert z \rvert$	$\sqrt{10}$ ✓	$\frac{\sqrt{10}}{2}$ ✓	$\sqrt{2}$ ✓
$\varphi = \arg(z)$	~~0,6435~~ 1,275 f	0,6435 f	$\frac{\pi}{2}$ ✓

8P.

Aufgabe 6 (19 P.)

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - 3\,\mathrm{j}$ und $z_2 = -3 + 2\,\mathrm{j}$.

(a) Zeichnen Sie die beiden Zahlen in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(b) Bestimmen Sie folgende Werte in kartesischer Form.

Sie dürfen Ihre Antworten gern gleich hier angeben, sofern der Platz reicht. Bitte an die Zwischen-Rechenschritte denken.

(b1) $z_1 + z_2$

(b2) $z_1 - z_2$

(b3) $z_1 \cdot z_2^*$

(b4) $\dfrac{3z_1}{z_2}$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen 3. Wurzeln von z_1. Geben Sie die Ergebnisse in Exponentialform an, die Winkel sollten dabei im Intervall $[0, 2\pi)$ liegen.

Sie dürfen Ihre Antworten gern gleich hier angeben, sofern der Platz reicht. Bitte an die Zwischen-Rechenschritte denken.

Mathematik 1

[redacted] [redacted]

23.01.18

1) a)

p	q	$\neg p$	$(\neg p \to q)$	$q \land (\neg p \to q)$	$(q \land (\neg p \to q)) \to q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1

✓

~~b)~~

~~$1 = (q \land (\neg p \to q)) \to q$~~

~~$1 = \neg(q \land (p \lor q)) \lor q$ | Ersetzung~~

~~$1 = \neg q \lor \neg(p \lor q)) \lor q$ | De ~~De~~ Morgan~~

~~$1 = (\neg q \lor (\neg p \land \neg q)) \lor q$ | De Morgan, De Morgan~~

~~$1 = \neg q \lor q$~~

a2) $1 = (q \land (\neg p \to q)) \to q$

$1 = \neg(q \land (p \lor q)) \lor q$ | Ersetzungsregel ✓

$1 = (\neg q \lor \neg(p \lor q)) \lor q$

$1 = (\neg q \lor (\neg p \land \neg q)) \lor q$ } De Morgan ✓

$1 = \neg q \lor q$ | Absorption — sonst fehlt auch keine Absorption ... (−1P.)

$1 = 1$ | Komplementarität ✓

b)

b1) $\neg \forall x: (a(x) \to b(x))$?

$\neg \forall x: (\neg a(x) \lor b(x))$ | Ersetzung ✓

$\exists x: \neg(\neg a(x) \lor b(x))$ | Allquantor zu Ex. Quant.

$\exists x: (a(x) \land \neg b(x))$ | De Morgan

1v.6

Mathematik 1 23.01.18

[redacted] [redacted]

1)

b2)

$\neg \exists x : (\neg a(x) \wedge \neg b(x))$

$\forall x : \neg(\neg a(x) \wedge \neg b(x))$ | Existenzquantor negiert zu All-Quantor ✓

$\forall x : (a(x) \vee b(x))$ | De Morgan

c) c_1) $A \setminus B = \underline{[-1, 0]}$ (✓) f $[-1, 1)$ (−2P.)

c_2) $(A \setminus B) \cap C = [-1, 0] = \underline{\underline{B}}$ ✓ (Folgefehler)

2)

a) $(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n$

$\binom{7}{3} x^4 y^3$

$\binom{7}{3} = \underline{\underline{35}}$ (✓) aber $2x+y \Rightarrow 35 \cdot 2^4$ (−2P.)

b) b_1) $(e^{-x+5})^2 = e^{4-5x}$

$e^{-2x+10} = e^{4-5x}$ ✓ | ln ✓

$-2x+10 = 4-5x$ | −4

$-2x+6 = -5x$ | +2x

$6 = -3x$ | : −3

$-2 = x$ ✓

~~(b_2)~~

~~$\ln x = 4 - 2\ln x$~~ f

~~$\ln x = 4 + \ln x^{-2}$ | $e^{\dots}$~~

~~$e^x = e^4 + e^{x^{-2}}$~~

~~$e^x - e^{\frac{1}{x^2}} = e^4$~~

zu 6

Mathematik 1

[redacted] [redacted]

23.01.18

~~2)(b)(b2)~~

$$\cancel{\ln x = 4 - 2\ln x \quad | + 2\ln x}$$
$$\cancel{3\ln x = 4 \quad | :3}$$
$$\cancel{\ln x = \frac{4}{3} \quad | e^{\cdots}}$$
$$\cancel{x = e^{\frac{4}{3}}}$$

2) b) b2

$$\ln x = 4 - 2\ln x \quad | + 2\ln x$$
$$3\ln x = 4 \checkmark \quad | :3$$
$$\ln x = \frac{4}{3} \quad | e^{\cdots}$$
$$x = e^{\frac{4}{3}} \checkmark$$

3) a)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3x^2 + 2 - 4 = 0 \checkmark$$

$$\cancel{3x^2 = 2}$$
$$\cancel{x_{1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}}$$
$$\cancel{= 3x^2 - 2 = 0}$$
$$\cancel{= 3x^2 = \tfrac{2}{3}}$$
$$\cancel{x = \sqrt{\tfrac{2}{3}}}$$

$\cancel{x < 1}$

$$0 = 3x^2 - 2 \quad | + 2$$
$$2 = 3x^2 \quad | :3$$
$$\frac{2}{3} = x^2 \checkmark \quad | \sqrt{}$$
$$\pm \sqrt{\frac{2}{3}} = x$$

(2 Lösungen!) (−1P.)

3 v. 6

Mathematik 1

[redacted] [redacted]

23.01.18

3b) b_1) $|\vec{c}| = \sqrt{4^2+0^2+3^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

$|\vec{d}| = \sqrt{2^2+1^2+4^2} = \boxed{\sqrt{21}}$

b_2) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|} = -\dfrac{4}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{21}} = -0{,}1745$ f

$\boxed{\varphi \approx 1{,}746 \text{ rad}}$ f im Gradmaß? (−2P.)

b_3) $\vec{c}\times\vec{d} = \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3\\22\\-4\end{pmatrix}}$

$$\begin{matrix}4 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 4\\ 4 & 2\\ 0 & -1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0+3\\ 6+16\\ -4+0\end{matrix} = \begin{pmatrix}3\\22\\-4\end{pmatrix}$$ f (−1P.)

4) a) $p(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3$

$x_1 = 1$

$(4x^3 - 8x^2 + x + 3) : (x-1) = 4x^2 - 4x - 3$

$-(4x^3 - 4x^2)$

$-4x^2 + x$

$-(-4x^2 + 4x)$

$-3x + 3$

$-(-3x + 3)$

0

$0 = 4x^2 - 4x - 3$

$0 = x^2 - x - \frac{3}{4}$

$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$

$x_2 = 1{,}5$

$x_3 = -0{,}5$

4 v. 6

$\boxed{P(x) = 4(x-1)(x-1{,}5)(x+0{,}5)}$

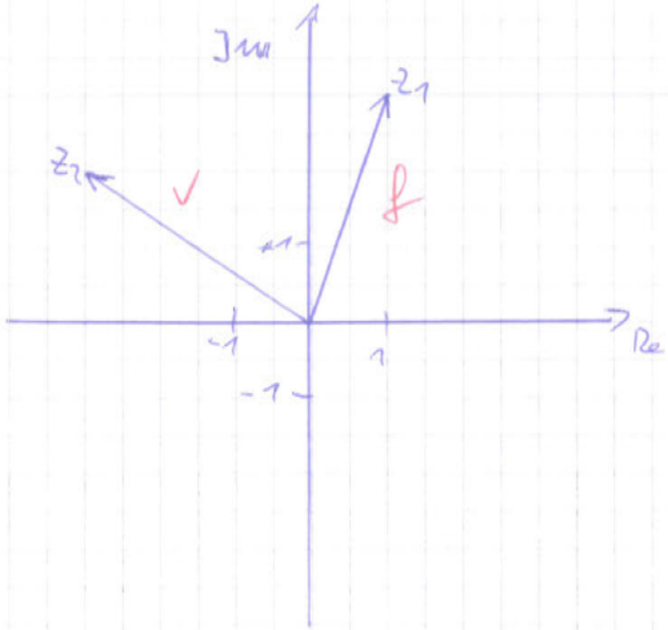
$\Longrightarrow$ s.u.

Mathematik 1 23.01.18

[redacted] [redacted]

6)

a)



(−1P.)

b) b1)

$z_1 + z_2 = (1-3j)+(-3+2j) = -2-j$ ✓

b2) $z_1 - z_2 = (1-3j)-(-3+2j) = 4-5j$ ✓

b3) $z_1 \cdot z_2^* = (1-3j)\cdot(-3-2j) = -3 - 2j + 9j + 6j^2$

$= -9+7j$ ✓

b4) $\frac{3z_1}{z_2} = \frac{3-9j}{-3+2j} \cdot \frac{(-3-2j)}{(-3-2j)} = \frac{-9+27j-6j-18j^2}{9-4j^2}$

$= \frac{9+21j}{13}$

$= \frac{9}{13} + \frac{21}{13}j$

(−2P.)

c) $\varphi = 1{,}275 = \alpha$

$z_1 = \sqrt{10}\, e^{j\,1{,}275}$ ← Folgefehler

~~$z_0 = 1{,}778$~~

~~$z_1 =$~~

~~$z_3 =$~~

5v.6

Mathematik 1

[redacted] [redacted]

23.01.2018

6 c)

φE

$$r = \sqrt[3]{\sqrt{10}} = 1{,}467$$

$$\varphi_0 = \frac{1{,}275 + 0 \cdot 2\pi}{3} = 0{,}425$$

$$\varphi_1 = \frac{1{,}275 + 1 \cdot 2\pi}{3} = 2{,}519$$

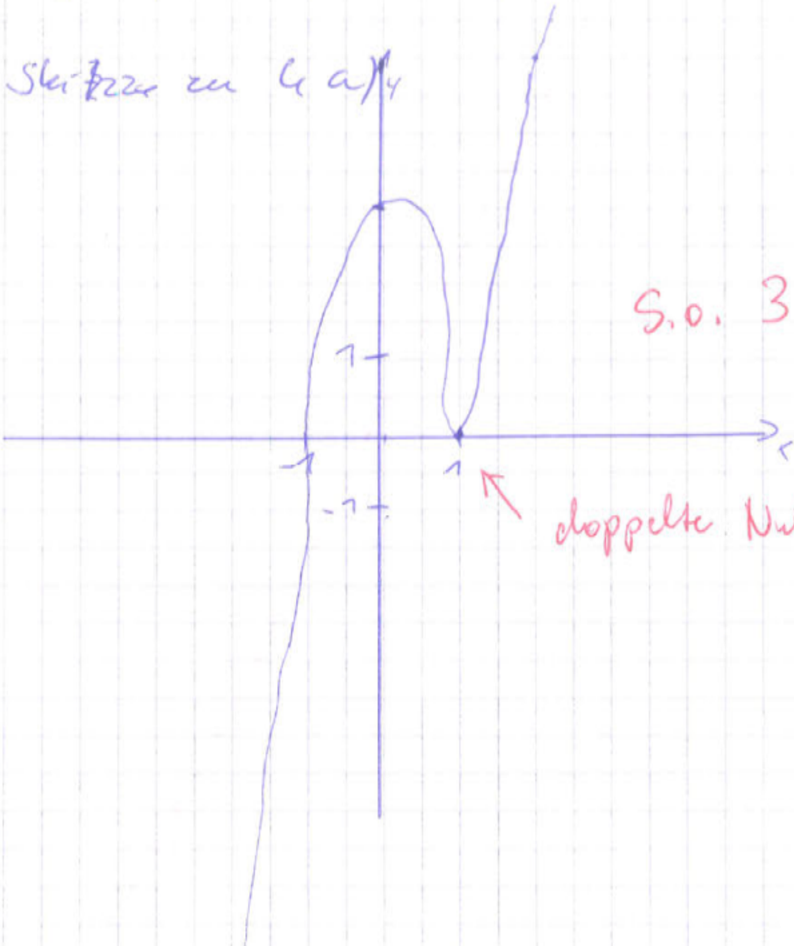
$$\varphi_2 = \frac{1{,}275 + 2 \cdot 2\pi}{3} = 4{,}613$$

$z_0 = 1{,}467 e^{j0{,}425}$

$z_1 = 1{,}467 e^{j2{,}519}$ Folgefehler

$z_3 = 1{,}467 e^{j4{,}613}$

Skizze zu 4 a)



S.o. 3 Nullstellen?

doppelte Nullstelle ??

(−1P.)