Julia Loutchko
BHT Berlin / FB II

Klausur „Mathematik 1/ TI " (WS 2015/16, 24.03.2016)

Vorname: [redacted]
Name:
Matr.-Nr.:

Letzter Prüfungsversuch: ☐ ja ☒ nein

Wichtige Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die bei den Aufgaben angegebenen Punktzahlen entsprechen in etwa der Zeit in Minuten, die Sie maximal zur Bearbeitung der Aufgaben verwenden sollten.
- Täuschungsmanöver führen zum sofortigen Ausschluss von der Klausur!
- Teilnahme an der Klausur bedeutet, dass kein Prüfungsrücktritt für Mathematik 1 mehr möglich ist.

Ich habe die Hinweise zur Kenntnis genommen:

[redacted]

Aufgabe	1	2	3	4	ZA	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	17	23	25	25	15		
erreichte Punkte	17	23	25	25	14		

1,0

1. Aufgabe (17 Punkte). Lösen Sie die Gleichung

$$e^{x-3} + 3e^{x} = 100$$

2. Aufgabe (23 Punkte). Wie lautet die durch Superposition der beiden gleichfrequenten mechanischen Schwingungen

$$y_1 = 20 \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{3})$$

und

$$y_2 = 10 \cdot \cos(2t + \frac{\pi}{6})$$

entstandene resultierende Schwingung (für $t \geq 0$)?

3. Aufgabe (25 Punkte). Zeigen Sie:

a) Die vier Punkte $A = (2; -1; 3), B = (-1; 0; 5), C = (1; 7; -1)$, und $D = (0; -2; 4)$ liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

b) Welchen Winkel schließen $|\vec{AB}|$ und $|\vec{AD}|$ miteinander ein?

4. Aufgabe. (25 Punkte). Lösen Sie die Matrizengleichung $X \cdot A = B$ durch Invertierung der Matrix A, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Zusatzaufgabe (15 Punkte). Berechnen Sie $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{20}$.

20160324
Mathe1Prüfung

[redacted]

1.) $100 = e^{x-3} + 3e^{x}$

$= e^{-3} \cdot e^{x} + 3e^{x} = (e^{-3}+3)\,e^{x}$

$e^{x} = \dfrac{100}{e^{-3}+3}$

$x = \ln\left(\dfrac{100}{e^{-3}+3}\right) = \underline{\underline{3{,}49}}$ ✓

2.) $y_1 = 20 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$

$y_2 = 10 \cdot \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = 10 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{y_1} = 20 \cdot \exp\left(i\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \underbrace{20\exp\left(i \cdot \frac{\pi}{3}\right)}_{A_1} \cdot \exp(i2t)$

$\underline{y_2} = 10 \cdot \exp\left(i\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \underbrace{10\exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{3}\right)}_{A_2} \cdot \exp(i2t)$

$\underline{y_{ges}} = \underline{y_1} + \underline{y_2} = \left(20\exp\left(i \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 10\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)\right) \cdot \exp(i2t)$

$\cancel{= (17{,}32 + 10i + 10 + 0{,}07i) \cdot \exp(i2t)}$

$\cancel{= (27{,}32 + 10{,}07i) \cdot \exp(i2t)}$

$= (20\exp(i \cdot 60^\circ) + 10\exp(i \cdot 120^\circ)) \cdot \exp(i2t)$

$= (10 + 10 \cdot \sqrt{3}\,i - 5 + 5 \cdot \sqrt{3}\,i)\exp(i2t)$

$= (5 + 15\sqrt{3}\,i)\exp(i2t)$

$A = \sqrt{5^2 + 15^2 \cdot 3} = 26{,}4575$

$\varphi = \arctan\left(\frac{15 \cdot \sqrt{3}}{5}\right) = 79{,}1^\circ$ ✓

$y_{ges} = \operatorname{Im}(\underline{y_{ges}}) = \underline{\underline{26{,}4575 \cdot \sin(2t + 79{,}1^\circ)}}$ ✓

3.) $\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = C - A \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{AD} = D - A \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

20160384
Mathe 1 Prüfung

[redacted]

A, B, C, D liegen nicht in einer Ebene $\Leftrightarrow \det|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}| \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-3)\cdot 8\cdot 1 + (-1)(-1)\,2 + (-2)\cdot 1\cdot(-4) - 2\cdot 8(-2) - (-4)(-1)(-3) - 1\cdot 1\cdot(-1)$$

$$= -24 + 2 + 8 + 32 + 12 + 1 = 31 \neq 0$$ q.e.d.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\measuredangle(\vec{a},\vec{b}))$$

$$\Rightarrow \measuredangle(\vec{AB}, \vec{AD}) = \cos^{-1}\left(\vec{AB}\cdot\vec{AD} \,/\, (|\vec{AB}|\cdot|\vec{AD}|)\right)$$
(oder auch arccos)

$$= \cos^{-1}\left((6 - 1 + 2) / (\sqrt{14}\cdot\sqrt{6})\right)$$

$$= \cos^{-1}(0{,}764) = \underline{\underline{40{,}2^\circ}}$$

4.) $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung von A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ \cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & 1.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -0.5 \\ -5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) :6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 0 & 1/6 \end{array}\right) \begin{array}{l} +1 \\ -2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/6 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 0 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X\cdot A = B \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1} = X$$

$$B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 4 \\ -25 & 15 & -8 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 0 & 4 \\ -25 & 15 & -8 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}}$$

2/3

2 0 1 6 0 3 2 4
Mathe 1 Prüfung
[redacted]

5.) $\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot e^{i \pi/4} \quad | \; x^{20}$

$(\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2})^{20} = 2^{20} \cdot e^{i \cdot 5\pi}$

$= 1048576 \cdot e^{i \cdot \pi}$

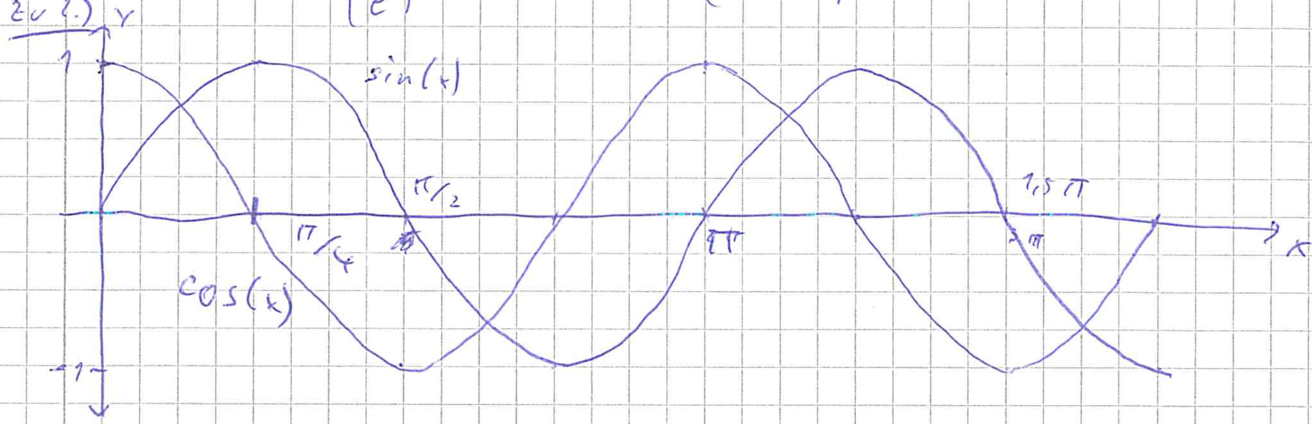
$e^{i\pi} = -1$

3/3

zu 1.)

$$e^{x-3} + 3e^x = \left(\frac{1}{e}\right)^3 e^x + 3e^x = \left(3 + e^{-3}\right) e^x = 100$$

zu 2.)

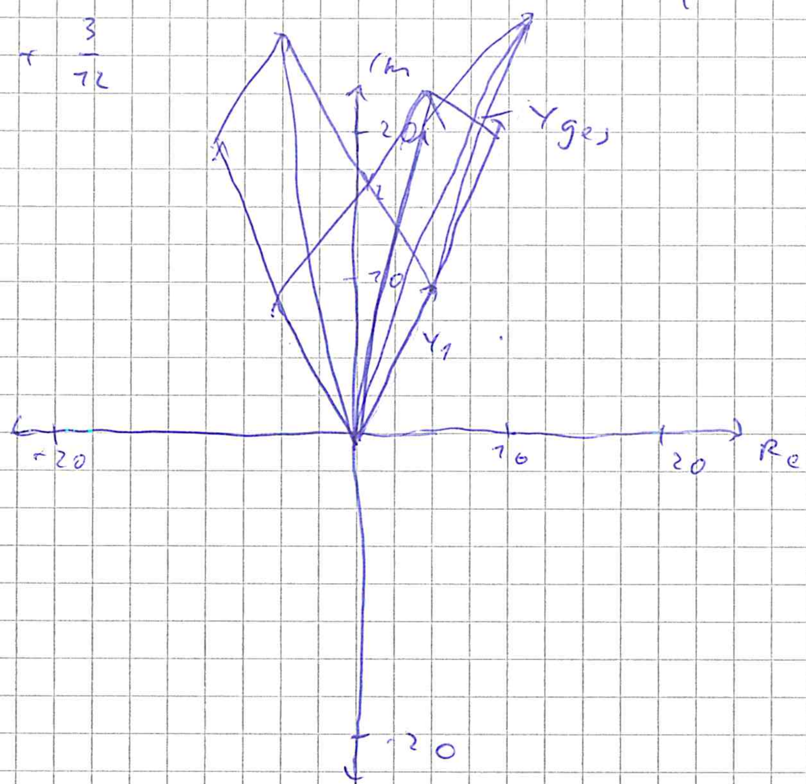


$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(2x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4}{24} + \frac{6}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \quad \Big| \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{12} + \frac{3}{12}$$



$$4 - 1/2 - \frac{10}{6} = \frac{3}{6} - \frac{10}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6/6 & 0/6 \\ 0 & 0 & 6/6 \end{pmatrix} ?$$

$$-1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 1$$

$$-1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

$$-1 \quad \begin{pmatrix} 14/6 & 0 & 4/6 \\ 45/6 & 15/6 & -8/6 \\ 11/6 & 3/6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 4 \\ -25 & 15 & -8 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & \cancel{1} & \cancel{1}\ 2 \\ 1 & 1 & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

$\cancel{(-35+10)}$ 15 $(-10+2)$ $25-15+40$

-25 15 -8 $-25+45-8$

$-7-7+5$

$3 \quad 3 \quad 0$

$$-3+9 = 6/6 = 1$$

zu 5. $\exp(i5\pi) = \exp(i\pi + 2\cdot 2\pi i)$