Klausur Mathematik I (TI)
31. März 2015

BEUTH HOCHSCHULE
FÜR TECHNIK
BERLIN
University of Applied Sciences

Prof. Dr. P. Erdelt

WS 14/15

Name: [redacted] ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Codewort: ....

Letzte Wiederholung dieser Prüfung gemäß RPO: ja ☐ nein ☐

Erreichte Punkte: 57

Erreichte Prozent: 57

Angerechnete Prozent: 7

Prozent Summe: 64

Note: 3,0

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	14	6
2	12	4
3	14	8
4	25	24
5	18	10
6	17	5

Bitte lesen Sie die wichtigen Hinweise auf der Rückseite dieses Heftes!

Füllen Sie den oberen Teil des Deckblattes aus und warten Sie auf das Zeichen zum Umblättern.

Ich wünsche Ihnen **viel Erfolg!**

1. Aufgabe (14 Punkte):

Kreuzen Sie die passende Antworten an! **Es kann nur eine Antwort richtig sein.**
Ihre Entscheidung brauchen Sie nicht zu begründen!
Für jede falsche Antwort bekommen Sie einen Punkt abgezogen!

2 **1.1. (2 Punkte)** Die Formel $\neg A \leftrightarrow (B \oplus C)$ erhält für die Belegung $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ den Wahrheitswert:

☒ 0 ☐ 1 ☐ keinen

✓

−1 **1.2. (2 Punkte)** Gegeben sei die Aussageform $T(n)$: „n ist durch 2 teilbar“, $n \in \mathbb{N}$. Wie lautet die Negation der folgenden Aussage?

$$\forall_n (T(n^2) \leftrightarrow T(n))$$

☒ $\exists_n (\neg T(n^2) \rightarrow T(n))$
☐ $\exists_n (T(n^2) \leftarrow \neg T(n))$
☐ $\exists_n (T(n^2) \oplus T(n))$
☐ $\forall_n (T(n^2) \wedge T(n))$

−1 **1.3. (2 Punkte)** Die Menge $(\mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N})) \cap \mathbb{N}$ ist gleich der Menge

☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{Z}$ ☒ $\emptyset$ ☐ $\overline{\mathbb{N}}$.

2 **1.4. (2 Punkte)** Der Wert von $\frac{(2^8)^2}{2^4} + (16)^3$ beträgt:

☐ 2^{11} ☐ 2^{12} ☒ 2^{13} ✓ ☐ 2^{16}

2 **1.5. (2 Punkte)** Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallende Funktion und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konstante Funktion. Dann ist $f \circ g$:

☒ konstant ☐ streng monoton fallend ☐ monoton wachsend ☐ monoton fallend.

✓

2 **1.6. (2 Punkte)** Ein komplexer Zeiger wird mit i multipliziert. Was bedeutet das geometrisch?

☐ Der Zeiger wird an der reellen Achse gespiegelt.
☐ Der Zeiger wird an der imaginären Achse gespiegelt.
☐ Der Zeiger wird um 90° im Uhrzeigersinn gedreht.
☒ Der Zeiger wird um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

✓

− **1.7. (2 Punkte)** Seien $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\langle v, w \rangle =$

☐ 1 ☐ 2 ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐

2. Aufgabe (12 Punkte):

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie dabei auch, für welche $x \in \mathbb{R}$ folgende Aussagen überhaupt sinnvoll sind.

3 **2.1. (7 Punkte)** $\frac{2x-5}{|2-x|} \leqslant 1$

1 **2.2. (5 Punkte)** $|x-1| - 3 \leqslant |x-2| - 5$

2.1 $\frac{2x-5}{|2-x|} \leq 1$, für $x \neq 2$

1. Fall $x \geq 0$

$\frac{2x-5}{2+x} \leq 1$

$2x-5 \geq 2+x$

$2x \geq 7$

$x \geq 3{,}5$

2. Fall $x \leq 0$

$\frac{2x-5}{2-x} \leq 1$

$2x-5 \geq 2-x$

$3x \geq 7$

$x \leq 2\frac{1}{3}$

1. Fall $x \cancel{\geq 0}$ $2-x > 0$

$\frac{2x-5}{x-5} \geq 1$

$2x-5 \geq x-$

$\frac{2x-5}{2-x} \leq 1$

$2x-5 \leq 2-x$

$3x \leq 7$

$x \geq 2\frac{1}{3}$

2. Fall $2-x < 0$ $x \cancel{\leq} 0$

$\frac{2x-5}{-(2-x)} \leq 1$

$\vdots$

$x \leq 2\frac{1}{3}$

2.2 $|x-1| - 3 \leq |x-2| - 5$

1. Fall

$x \geq 9$?

$x-1-3 \leq x-2-5$

$x-1 \leq x-4$

$0 \leq -3$

3. Aufgabe (14 Punkte):

Sei a_n die Folge $-1, 2, 5, 8, \ldots$

2 **3.1. (2 Punkte)** Geben Sie die Folge a_n in rekursiver Form an.

0 **3.2. (2 Punkte)** Geben Sie die gleiche Folge in geschlossener (expliziter) Form an. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

2 **3.3. (4 Punkte)** Ist die Folge arithmetisch? Ist sie geometrisch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

2 **3.4. (4 Punkte)** Sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1}$$

Stellen Sie eine Formel auf zur leichten Berechnung von s_n. Überprüfen Sie die Formel für $n = 10$. Welchen Wert hat s_{100}?

2 **3.5. (2 Punkte)** Schreiben Sie $-\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \ldots + \frac{10}{1024}$ in Summenschreibweise.

3.1 $a_1 = -1 \quad a_n = a_{n-1} + 3$ ✓

3.2 ~~$a_n = a_n - a_1$ $a_k - a_n$ $\sum_{k=0}^{n} a_k + 3$~~

$a_k = a_n + 3$ immer noch rekursiv beschrieben

3.3 Die Folge ist arithmetisch, da die Differenz zwischen den Glieder 3 beträgt. ✓ Geometrisch?

3.4 $s_{10} \sum_{k=1}^{10} a_k = 5 \cdot a_1 + d \cdot \frac{5 \cdot (5-1)}{2} = 10 \cdot -1 + d \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 125$ ✓

Geprüft?

$s_{100} =$?

3.5 $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k \frac{k}{2^k}$ ✓

Fortsetzung Aufgabe 3

4. Aufgabe (25 Punkte):

Peter hat sich von einem Mobilfunkanbieter unverbindlich beraten lassen. Jetzt stellt er folgende Überlegungen an:
1 *Wenn ich ein neues Handy kaufe, dann brauche ich auch einen Ersatzakku.* *Wenn ich nicht Handy und Ersatzakku kaufe,* 2
2 *dann brauche ich auch keinen neuen Mobilvertrag.* *Wenn ich keinen neuen Mobilvertrag nehme, muss ich aber auf jeden* 3
3 *Fall das neue Handy kaufen.*

Wir definieren die Aussagevariablen

$H \Leftrightarrow$	Handy wird gekauft
$E \Leftrightarrow$	Ersatzakku wird gekauft
$M \Leftrightarrow$	Mobilvertrag wird abgeschlossen

5 **4.1. (5 Punkte)** Stellen Sie damit eine Boolesche Funktion *kauf* auf, die die Kombinationen dieser Alternativen mathematisch ausdrückt. Begründen Sie Ihre Schritte.

8 **4.2. (9 Punkte)** Welche Alternativen hat Peter? Begründen Sie Ihre Antwort mittels der folgenden Wahrheitstafel.

! !

folgerichtig

				(1)	(2)	(3)	$kauf$
$\neg H$	H	E	M	$\neg H \vee E$	$H \wedge E \vee \neg M$	$M \vee H$	$1 \wedge 2 \wedge 3$
1	0	0	0	1	~~0~~	0	0
1	0	0	1	1	~~1~~	1	1
1	0	1	0	1	~~0~~	0	0
1	0	1	1	1	~~1~~	1	1
0	1	0	0	0	~~0~~	1	0
0	1	0	1	0	~~1~~	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1 ✓	1	1 ✓	1

11 **4.3. (11 Punkte)** Überprüfen Sie Ihre Antwort zu 4.2 mittels logischer Identitäten! Verwenden Sie pro Schritt nur eine Regel und geben Sie den Namen an.

4.1 ~~$(\neg(H \wedge E) \rightarrow M) \wedge$~~

$$\underbrace{(H \rightarrow E)}_{1} \wedge \underbrace{(\neg(H \wedge E) \rightarrow \neg M)}_{2} \wedge \underbrace{(\neg M \rightarrow H)}_{3}$$

1. neues Handy impliziert neuen Akku
2. Kein Handy und kein Akku impliziert keinen neuen Vertrag
3. Kein Vertrag impliziert Handy

4.2 $(H \rightarrow E) \wedge (\neg(H \wedge E) \rightarrow \neg M) \wedge (\neg M \rightarrow H)$

$\overset{imp.}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge (\neg\neg(H \wedge E) \vee \neg M) \wedge (\neg\neg M \vee H)$

$\overset{inv}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge ((H \wedge E) \vee \neg M) \wedge (M \vee H)$

$\overset{distr.}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge (\neg M \vee E) \wedge (\neg M \vee H) \wedge (M \vee H)$

$\overset{distr.}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge (\neg M \vee E) \wedge (\neg M \vee H) \wedge (M \vee H)$

$\overset{distr}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge \neg M \vee (E \wedge H) \wedge (M \vee H)$

$\overset{komm.}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge (E \wedge H) \vee \neg M \wedge (M \vee H)$

Fortsetzung Aufgabe 4

$$\overset{\text{distr.}}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge (E \wedge H) \vee (\neg M \wedge M) \vee (\neg M \wedge H)$$

$$\overset{\text{kompl.}}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge (E \wedge H) \vee 0 \vee (\neg M \wedge H)$$

$$\overset{\text{neutr.}}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge (E \wedge H) \vee (\neg M \wedge H)$$

$$\overset{\text{distr.}}{\Longleftrightarrow} (\neg H \vee E) \wedge H \wedge (E \vee \neg M)$$

$$\overset{\text{distr.}}{\Longleftrightarrow} (H \wedge \neg H) \vee (E \wedge H) \wedge (E \vee \neg M)$$

$$\overset{\text{kompl. } \cancel{\text{neutr.}}}{\Longleftrightarrow} 0 \vee (E \wedge H) \wedge (E \vee \neg M)$$

$$\overset{\text{neutr.}}{\Longleftrightarrow} E \wedge H \wedge (E \vee \neg M)$$

$$\overset{\text{komm.}}{\Longleftrightarrow} H \wedge E \wedge (E \vee \neg M)$$

$$\overset{\text{absorb.}}{\Longleftrightarrow} H \wedge E$$

2

5. Aufgabe (18 Punkte):

Gegeben sei der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Abbildung 1 abgebildet.

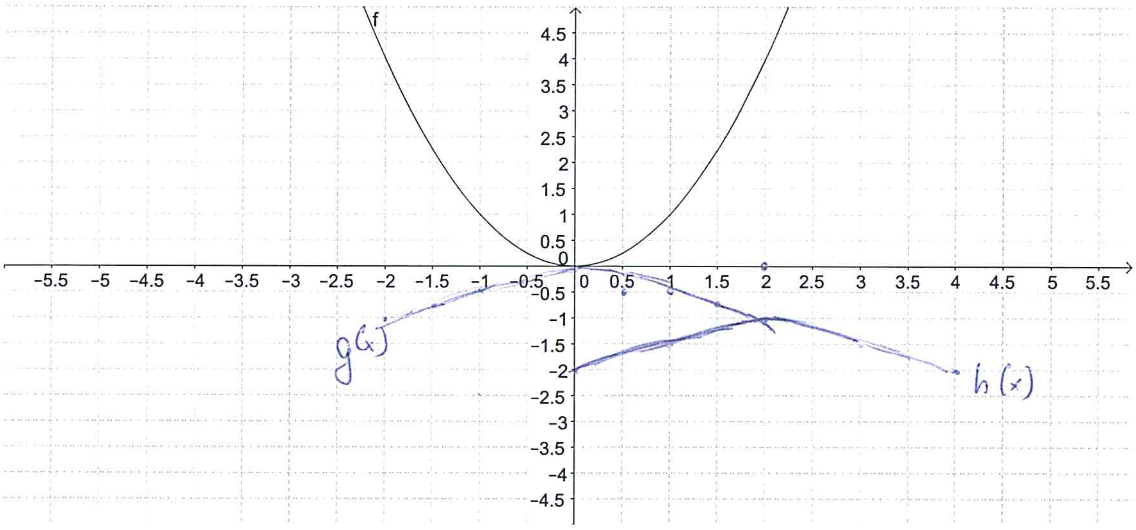

Abbildung 1: Zur Aufgabe 5

2 **5.1.** **(2 Punkte)** Ist f eine gerade bzw. ungerade Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort!

2 **5.2.** **(2 Punkte)** Untersuchen Sie die Monotonie von f! Geben Sie die Intervalle an, auf denen Monotonie vorliegt!

3 **5.3.** **(3 Punkte)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ in Abbildung 1. Beschreiben Sie möglichst kurz den Unterschied zum Graphen von f.

0 **5.4.** **(2 Punkte)** Ist g eine gerade bzw. ungerade Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort!

2 **5.5.** **(2 Punkte)** Untersuchen Sie die Monotonie von g! Geben Sie die Intervalle an, auf denen Monotonie vorliegt!

— **5.6.** **(3 Punkte)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $h(x) = g(x-2)-1$ in Abbildung 1. Beschreiben Sie möglichst kurz den Unterschied zum Graphen von g.

1 **5.7.** **(4 Punkte)** Ist h invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

5.1 Aus der Form von f kann man ~~folgern das f eine Potenzfunktion mit geradem Exponenten~~

wie ?

f ist eine gerade Funktion, da aus der Form erschlossen werden kann, das f eine Potenzfunktion mit geradem Exponenten ist, und damit gilt $f(x) = f(-x)$.

5.2 für $]-\infty, 0[$ gilt, ~~stark~~* monoton fallend   * streng

für $]0, \infty[$ gilt, ~~stark~~* monoton wachsend

5.3 Der Graph $g(x)$ ist der Graph $f(x)$ an der x-Achse gespiegelt und um das doppelte gespreizt.

5.4 die Funktion g ist ungerade da gilt $f(x) = -f(-x)$

Nein

Fortsetzung Aufgabe 5

5.5 g(x) ist streng monoton wachsen für $]-\infty, 0[$ und streng monoton fallend für $]0, \infty[$ ✓

5.~~6~~7 h(x) ist invertierbar, da sie f. streng monoton ist.
ist sie nicht

5.6

?

6. Aufgabe (17 Punkte):

Sei $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ eine komplexe Zahl in Normaldarstellung.

0 **6.1.** **(2 Punkte)** Geben Sie z_1 in Polardarstellung[1] an.

2 **6.2.** **(4 Punkte)** Geben Sie $z_1^3 = z_1 \cdot z_1 \cdot z_1$ in Polardarstellung und in Normaldarstellung an.

2 **6.3.** **(4 Punkte)** Geben Sie $z_1^6 = z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot z_1$ in Polardarstellung und in Normaldarstellung an.

1 **6.4.** **(7 Punkte)** Geben Sie $z_1 \cdot (-i)$ in Polardarstellung und in Normaldarstellung an. Bestimmen Sie das Ergebnis auch geometrisch, indem Sie die drei Zahlen z_1, $-i$ und das Produkt als Zeiger in ein Diagramm einzeichnen.

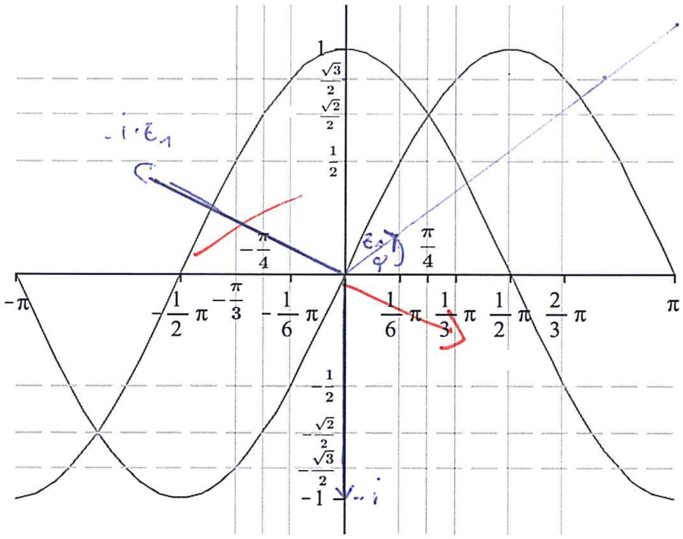

Abbildung 2: Werte von sin und cos

6.1 $r = |z_1| = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$r = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\varphi = \tan\left(\frac{a}{b}\right) = \cancel{34°}$ 60°

$z_1 = \cancel{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} e^{i34°}$

6.2 $z_1^3 = r_{z_1} \cdot r_{z_1} \cdot r_{z_1} \cdot e^{i\varphi_1 + \varphi + \varphi_1} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cdot e^{i102°}$

$= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot e^{i102°}$

folgerichtig

$z_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3}$ 1,25 1,75

Nein

---

[1] auch Eulerdarstellung genannt: $|z|e^{i\arg(z)}$

Fortsetzung Aufgabe 6

6.4 $\cancel{z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

$z_1 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (\cos 34 + i \cdot \sin 34) \, 1 \cdot (-i)$

$z_1 = -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) i \cdot (\cos 34 + i \cdot \sin 34) \cdot (-i)$

$= \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sin 34\right) - \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cos 34\right) i$

Weih ?

6.3 $z_1^6 = 8 \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^6 \cdot e^{i\, 204°}$ folgenutzung

$z_1^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 + i \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^3$ Nein

Wichtige Hinweise:

1. Diese Klausur ist eine **Prüfungsleistung im Sinne der RPO**. Ein Täuschungsversuch führt zu einem *sofortigen Ausschluss von der Teilnahme* unter Einziehung des Klausurheftes. Der Versuch zählt dann mit *Note 5.0*.
2. Vor Beginn der 120-minütigen Bearbeitungsphase werde ich zu Ihnen kommen und Ihre Identität überprüfen. Bitte halten Sie einen amtlichen Lichtbildausweis bereit. **Ohne Ausweis keine Teilnahme**.
3. Nach Beginn der Bearbeitungsphase zählt Ihr Teilnahmeversuch in jedem Fall.
4. **Während der Bearbeitung sind zugelassen:**
   - Maximal zwei von Ihnen beidseitig beschriftete DIN A 4-Blätter, bei Ausdruck oder Kopie nicht kleiner als mit 12-Punkt-Schrift. *Darauf steht Ihr Name.*
   - Dieses Klausurheft.
   - Permanente, nicht editierbare Schreibstifte.
5. **Nicht zugelassen sind:**
   - Die von mir zur Verfügung gestellten Skripte, Übungsblätter oder Lösungsblätter.
   - Jegliche Formelsammlungen.
   - Jegliche elektronische Geräte, die mehr können als die laufende Uhrzeit anzeigen.
   - Jegliche editierbaren Schreibstifte.
6. **Schreiben Sie ausschließlich in dieses Aufgabenheft.** Ihre mitgebrachten Unterlagen sind zum Lesen. Wenn Sie sie beschreiben, werde ich sie einziehen.
7. Schreiben Sie sämtliche Schritte, die gewertet werden sollen, unbedingt auf die **dafür vorgesehenen Seiten**. Sollten Sie dafür weiteres **freies Papier** benötigen, so bekommen Sie das ausschließlich von mir. Anderes Material werde ich nicht akzeptieren.
   Als **Konzeptpapier** dürfen Sie eigenes *freies* Papier benutzen. Es bleibt selbstverständlich an Ihrem Platz.
   Wenn Sie Text aus der Wertung nehmen wollen, *rahmen Sie ihn bitte ein und streichen ihn erkennbar durch*. Zwei verschiedene angebotene Lösungen werden **beide nicht bewertet**.
8. Es gibt **Punkte für alle Teile** eines Lösungsweges: Ansatz, Rechnung und Ergebnis. Alle Ihre Schritte müssen **begründet** werden (außer wo *explizit* anders gesagt) und **klar nachvollziehbar** sein.