

KLAUSUR
zur Lehrveranstaltung "Algorithmen"

Name: .

Klausur-Punkte: **71** / 75 Übungs-Punkte: **21** / 25 Vortrags-Punkte: **-**
Gesamt-Punkte: **92** / 100 **1,3** **K. Schin 1.2.07**

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Ein schwach zusammenhängender, schlichter Digraph **D** sei durch die folgenden Adjazenzlisten gegeben:

- | | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $A_1 = [4, 6, 10, 11]$, | $A_2 = [5, 7, 9, 12, 13, 14]$, | $A_3 = [1, 8, 10, 12]$, | $A_4 = [6, 8, 11, 13]$, |
| $A_5 = [3, 7, 9, 12]$, | $A_6 = [3, 7, 10, 13]$, | $A_7 = [1, 3, 4, 13]$, | $A_8 = [2, 5, 10, 14]$, |
| $A_9 = [3, 6, 7, 14]$, | $A_{10} = [2, 4, 12, 14]$, | $A_{11} = [2, 6, 8, 13]$, | $A_{12} = [4, 8, 9, 14]$, |
| $A_{13} = [5, 9, 10, 12]$, | $A_{14} = [2, 5, 8, 11]$, | | |

Ist **D** ein Euler-Digraph?

nein

Begründen Sie Ihre Antwort!

- da für jede Knoten v von **D** gelten muss: $d^-(v) = d^+(v)$
- für v_1 gilt dies z.B. nicht! $d^-(v_1) = 4 \neq 2 = d^+(v_1)$

Aufgabe 2 (5 Punkte):

a) Was verstehen Sie unter einem Greedy-Algorithmus?
Beschreiben Sie kurz seine Vorgehensweise!

Ein gieriger Algorithmus. Stürzt sich "ohne groß nachzudenken" auf die gestellte Aufgabe. Versucht im Falle des Scheiterns schnell aus Ziel zu kommen indem er am Anfang startet und zwei gefundene (und zu tauschende) Elemente sofort tauscht.

b) Nennen Sie einen typischen Greedy-Algorithmus, den Sie in der Lehrveranstaltung „Algorithmen“ kennen gelernt haben!

GnomeSort **f**

Aufgabe 3 (14 Punkte):

Durch das Verlegen von Glasfaserkabel sollen 8 Orte so miteinander vernetzt werden (ohne Beachtung einer bestimmten Netz-Topologie), dass die erforderliche Gesamt-Kabellänge möglichst klein wird.

14

Zwischen den Orten bestehen folgende Entfernungen (in km):

	Aubach	Blauen	Camberg	Distelhof	Erlental	Falkenau	Gersdorf	Hechtsee
Aubach	-	22 \times	12 \times	30	42	55	10 \checkmark	35
Blauen	22	-	40	65	33	70	20 \checkmark	27
Camberg	12	40	-	50	23 \times	5 \checkmark	9 \times	44
Distelhof	30	65	50	-	30	25 \checkmark	28	32
Erlental	42	33	23	30	-	18 \times	15 \checkmark	7 \checkmark
Falkenau	55	70	5	25	18	-	8	45
Gersdorf	10	20	9	28	15	8	-	60
Hechtsee	35	27	44	32	7	45	60	-

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35

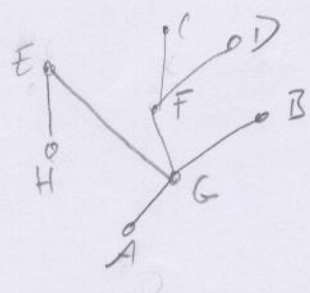
a) Das Kabel sparende Netz soll mittels des Algorithmus von Kruskal entworfen werden.

Tragen Sie alle „Kanten“ dieses Kabel sparenden Netzes in der Reihenfolge in die folgende Tabelle ein, in der sie beim Ablauf des Algorithmus gewählt werden!

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
[C,F]	[C,G] [E,H]	[A,G] [F,G]	[B,G] [A,G]	[C,E] [E,G]	[D,F] [B,G]	[D,F]
5	7	8	10	15	20	25

b) Welche Gesamt-Kabellänge ist für das Kabel sparende Netz mindestens erforderlich?

90



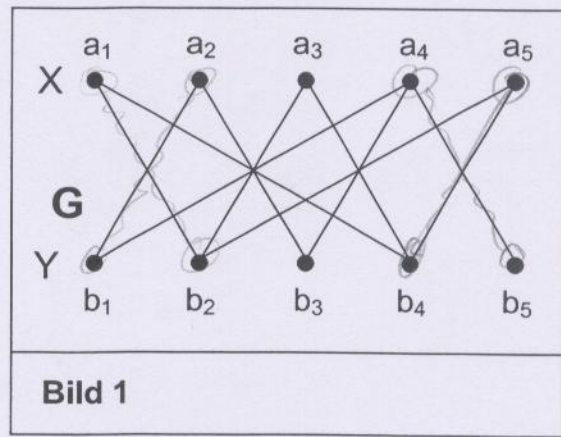
Aufgabe 4 (9 Punkte):

Gegeben ist der paare Graph **G** in Bild 1 mit dem Matching

$$M = \{ [a_1, b_2], [a_2, b_1], [a_4, b_5], [a_5, b_4] \}.$$

Verwenden Sie die Ungarische Methode, um die unten genannten Fragen zu beantworten!

Wählen Sie dabei im Falle mehrerer Auswahlmöglichkeiten immer den Knoten mit dem kleinsten Index!



9

a) Dokumentieren Sie den Verlauf der Methode in der folgenden Tabelle!

S	T	? =	P(S)	y ∈ P(S)	y M-ges.	y M-unges.
a3	∅	≠	b2, b4	b2	a1	
a1, a3	b2	≠	b2, b4	b4	a5	
a1, a3, a5	b2, b4	=	b2, b4			
da P(S)=T enthält G kein vollständiges Matching.						

b) Findet die Ungarische Methode einen **M**-erweiternden Weg in **G**?

nein

Wenn ja, geben Sie diesen an!

c) Enthält **G** ein vollständiges Matching von **X** in **Y**?

nein

Aufgabe 5 (14 Punkte):

Ein schlichter, orientierbarer Graph $G=(V,E)$ mit 35 Knoten v_1, v_2, \dots, v_{35} sei durch die folgenden Adjazenzlisten gegeben:

14

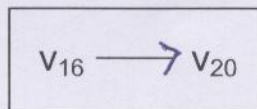
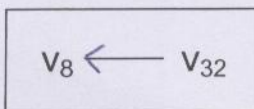
- $A_1=[8,9,22], A_2=[3,12], A_3=[2,4], A_4=[3,5,6,11], A_5=[4,7,10],$
 $A_6=[4,12,28], A_7=[5,22], A_8=[1,20,27,32], A_9=[1,20], A_{10}=[5,34],$
 $A_{11}=[4,32], A_{12}=[2,6], A_{13}=[16,20], A_{14}=[22,29,30], A_{15}=[24,31],$
 $A_{16}=[13,20], A_{17}=[26,28,31,35], A_{18}=[23,25], A_{19}=[26,29,31], A_{20}=[8,9,13,16],$
 $A_{21}=[33,35], A_{22}=[1,7,14], A_{23}=[18,30], A_{24}=[15,33], A_{25}=[18,31],$
 $A_{26}=[17,19,34], A_{27}=[8,32], A_{28}=[6,17], A_{29}=[14,19], A_{30}=[14,23],$
 $A_{31}=[15,17,19,25], A_{32}=[8,11,27], A_{33}=[21,24], A_{34}=[10,26], A_{35}=[17,21].$

Mit Hilfe des Algorithmus von Hopcroft und Tarjan soll eine stark zusammenhängende Orientierung für G ermittelt werden.

- a) Dokumentieren Sie in der folgenden Tabelle den Beginn des Algorithmus (d.h. nur die vorhandenen Tabellenfelder sollen ausgefüllt werden)! Beginnen Sie beim Knoten v_1 und wählen Sie im Falle mehrerer Möglichkeiten immer den Knoten mit dem kleineren Index!

Knoten- Markierung	Kanten-Orientierung	m m. K
$m(v_1) = 1$	/	1
$m(v_8) = 2$	$v_1 \rightarrow v_8$	1, 8
$m(v_{20}) = 3$	$v_8 \rightarrow v_{20}$	1, 8, 20
$m(v_9) = 4$	$v_{20} \rightarrow v_9$	1, 8, 9, 20
$m(v_{13}) = 4$	$v_{20} \rightarrow v_{13}$	
$m(v_{16}) = 5$	$v_{13} \rightarrow v_{16}$	
$m(v_{27}) = 3$	$v_8 \rightarrow v_{27}$	
$m(v_{32}) = 4$	$v_{27} \rightarrow v_{32}$	

- b) Welche Orientierung bekommen die beiden Kanten $[v_8, v_{32}]$ und $[v_{16}, v_{20}]$ in Schritt (4) des Algorithmus (Skript Seite 66)? Verbinden Sie die beiden Knoten jeweils durch den entsprechenden Pfeil!

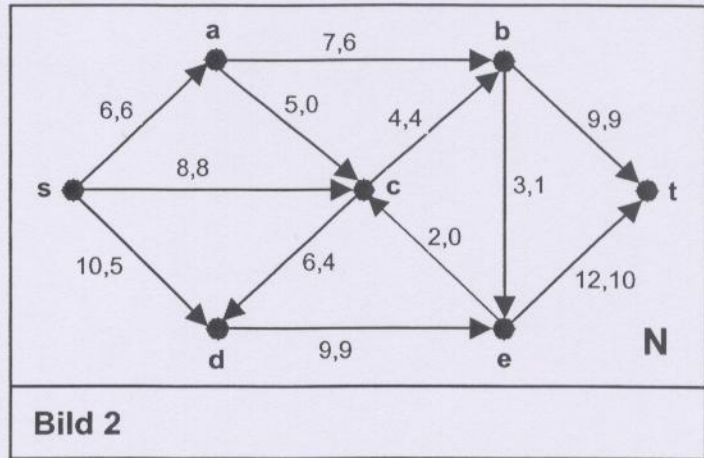


$$V = \{sd, ab, ac, cd, ec, be, et\}$$

$$E = A - \{ac, ec\}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte):

Gegeben ist das Netzwerk $N = (V, A, c)$ in Bild 2 mit der Quelle s und der Senke t , den eingetragenen Kapazitäten (1. Zahl) und dem eingetragenen Fluss f_n (2. Zahl).



6

a) Welchen Wert hat der Fluss f_n ?

19

b) Versuchen Sie der Fluss f_n mittels des Algorithmus von Ford und Fulkerson weiter zu vergrößern!

Dokumentieren Sie den Verlauf des Algorithmus in der folgenden Tabelle!

M'	s	d	c		
M	s	d	c		
m	0 5	4			
B	sd	dc			

da $m - m' = \emptyset$: Abbruch

Aufgabe 7 (6 Punkte):

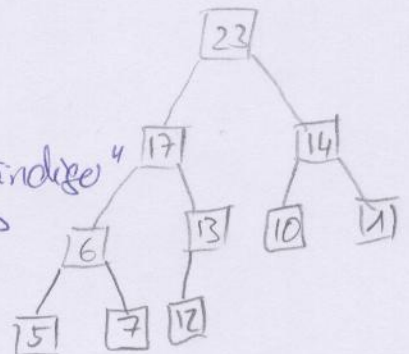
Ist die Folge

23	17	14	6	13	10	1	5	7	12
----	----	----	---	----	----	---	---	---	----

ein Max-Heap?

nein

Begründen Sie Ihre Antwort!



6

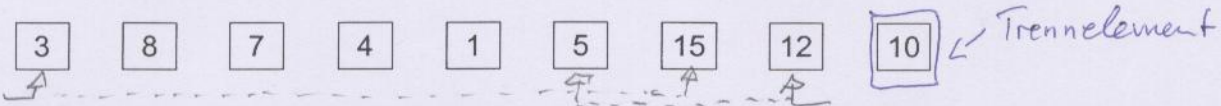
• max-heap ist definiert als ein "fast-vollständiger" Binärbaum, in dem jeder ~~Kn~~ der Wert jedes Knotens größer oder gleich dem Wert seiner Nachfolger ist.

hier: [7] als rechter Nachfolger von [6] hat einen größeren Wert.
 \Rightarrow kein max-heap

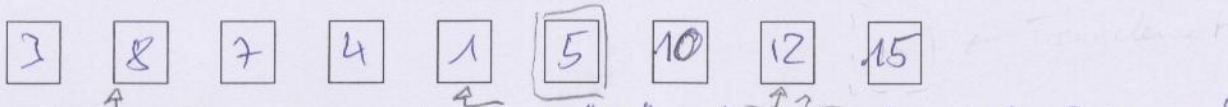
• berechnet werden die Positionen im Heap aus einem Array, wenn die Wurzel des Heap an Arrayposition 0 steht, folgendermaßen:
 linker Nachfolger von i : $2i+1$
 rechter Nachfolger von i : $2i+2$

Aufgabe 8 (8 Punkte):

Auf die folgende Eingabefolge soll der QuickSort-Algorithmus angewendet werden, wobei das letzte Element der Folge als Trennelement benutzt werden soll.



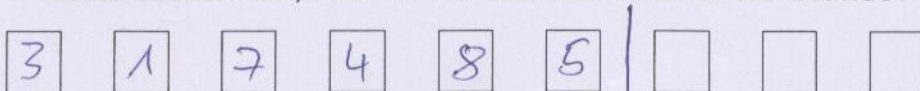
a) Notieren Sie die Eingabefolge nach der ersten Vertauschung von 2 Elementen, und begründen Sie, weshalb diese Vertauschung stattfindet!



Da das Trennelement den Wert "10" hat, sucht der linke Zeiger nach einem Wert ^{o. gleich} größer 10 und hält an, wenn gefunden. Der rechte Zeiger ^{o. gleich} beginnt links vom Trennelement und sucht einen Wert kleiner 10 und stoppt, falls gefunden.

Hier überschneiden sich die Zeiger, was bedeutet, dass die linke Folge (bis zum linken Zeiger) nur Elemente kleiner 10 enthält und die rechte Folge nur Elemente größer 10. Das Trennelement wird mit dem Element an der Position des linken Zeigers vertauscht.

b) Notieren Sie die Eingabefolge nach der darauffolgenden nächsten Vertauschung von 2 Elementen, und nennen Sie auch hierfür die Gründe!



~~In 15 das Trennelement und alle Werte in der Folge kleiner 15 sind läuft der linke Zeiger durch bis zum Element links vom Trennelement. Damit kreuzen sich die Zeiger sofort. Die linke Teilfolge wird zuerst bearbeitet. "5" ist Trennelement, es wird ~~wird~~ von links nach einem Element größer ^(o. gleich) 5 und von rechts nach einem Element kleiner 5 gesucht. gefunden: $1 \leq 5 \leq 8$. Die Elemente 1 und 8 werden getauscht.~~

Aufgabe 9 (8 Punkte):

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

	w / f
$10n + 5 \log n + 8 \in O(n)$	f
$10n + 5 \log n + 8 \in O(n \log n)$	w
$8n \in O(n^2)$	w
$\frac{n(n-1)}{4} \in O(n)$	f
$\frac{8n^3}{(n+1)} \in O(n^2)$	w

Achtung:
Für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen.