KLAUSUR

zur Lehrveranstaltung "Algorithmen"

Name[redacted]

Bitte a[redacted]

Dies ist mein **letzter Versuch**, das Fach zu bestehen. ☐

Klausur-Punkte: ...74.../ **75** Übungs-Punkte: ...22.../ **25**

Gesamt-Punkte: ...96.../ **100** ...1,0... ...K. Schie... 1.2.11

Aufgabe 1 (10 Punkte):

10

Ein schlichter, zusammenhängender Graph **G = (V,E)** mit **V =** $\{v_1, \ldots, v_{12}\}$ sei durch die folgenden Adjazenzlisten gegeben: $n = 12$

A_1=[4,6,11,12], $d() = 4$ A_2=[3,4,6,7,10,11], $d = 6$ A_3=[2,4,5,7,8,10,11], $d(v_3) = 7$

A_4=[1,2,3,7,9,12], $d() = 6$ A_5=[3,6,7,9,10,12], $d() = 6$ A_6=[1,2,5,8,11,12], $d(v_6) = 6$

A_7=[2,3,4,5,8,9,11,12], $d() = 8$ A_8=[3,6,7,9,10,12], $d() = 6$ A_9=[4,5,7,8,10,11], $d(v_9) = 6$

A_{10}=[2,3,5,8,9,12], $d() = 6$ A_{11}=[1,2,3,6,7,9], $d() = 6$ A_{12}=[1,4,5,6,7,8,10],. $d(v_{12}) = 7$

a) Ist **G** ein <u>Euler-Graph</u>? nein

Begründen Sie Ihre Antwort!

- nicht jeder Knoten in G ist gerade
- $d(v_3) = 7$ und $d(v_{12}) = 7$ ↯ G enthält einen Euler-Weg

b) Ist **G** ein <u>Hamilton-Graph</u>? ja

Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der in der Vorlesung gelernten Sätze!

- ~~bis der~~ Man würde die Hüllen-Operation solange anwenden ~~bis~~ wie möglich, oder bis der Satz von Dirac zu trifft.

- ~~Wenn~~ Hüllen-Operation mit V_1, erst $[v_1 v_7]$, dann $[v_1 v_3]$, ~~oder $[v_1, v_{12}]$~~, dann stellt man fest $d(v_i) \geq \frac{n}{2}$ $i = 1, \ldots, 12$ ↯ Satz von Dirac ist erfüllt

Aufgabe 2 (13 Punkte):

13

6 einzelne Häuser, die außerhalb des Dorfes **A**uberg stehen, sollen durch ein möglichst kostengünstiges Leitungssystem an die zentrale Wasserversorgung von **A**uberg angeschlossen werden.

Die Kosten für das Verlegen einer Wasserleitung von **A**uberg zu den einzelnen Häusern und zwischen den verschiedenen Häusern werden auf folgende Beträge geschätzt (in Hundert Euro):

	Auberg	**B**allack	**C**icero	**D**ittrich	**E**instein	**F**rei	**G**ates
Auberg	-	15	20	28	12	22	35
Ballack	15	-	23	30	42	60	24
Cicero	20	23	-	10	33	8	6
Dittrich	28	30	10	-	50	5	18
Einstein	12	42	33	50	-	25	16
Frei	22	60	8	5	25	-	9
Gates	35	24	6	18	16	9	-

a) Das kostengünstigste Leitungssystem soll mittels des Algorithmus von Kruskal ermittelt werden.

Notieren Sie die ersten 4 „Kanten" dieses Leitungssystems in der Reihenfolge, wie sie der Algorithmus wählt!

1.	2.	3.	4.
[F,D]	[G,C]	[F,C]	[A,E]
d()=5	d()=6	d()=8	d()=12

zu 4) [F,G] nicht sonst entsteht ein kreis
[C,D] aus dem gleichen grund nicht

b) Das kostengünstigste Leitungssystem soll mittels des Algorithmus von Prim ermittelt werden.

Notieren Sie die ersten 3 „Kanten", die der Algorithmus wählt, wenn der Ort Auberg als Startknoten benutzt wird!

1.	2.	3.
[A,E]	[A,B]	[E,G]
d()=12	d()=15	d()=16

Aufgabe 3 (14 Punkte):

14 -

Ein schlichter Graph **G** mit 16 Knoten $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ..., $\mathbf{u_{16}}$ sei durch die folgenden Adjazenzlisten gegeben :

A_1=[5,6],	A_2=[3,7,9],	A_3=[2,9,11,13,16],	A_4=[9,10],
A_5=[1,10,12],	A_6=[1,12],	A_7=[2,8,15],	A_8=[7,12,16],
A_9=[2,3,4],	A_{10}=[4,5,14],	A_{11}=[3,13],	A_{12}=[5,6,8],
A_{13}=[3,11],	A_{14}=[10,15],	A_{15}=[7,14],	A_{16}=[3,8].

Zur Bestimmung eines kürzesten Weges von $\mathbf{u_1}$ zu allen anderen Knoten von **G** soll das BFS-Programm von Moore (Skript, S. 42) verwendet werden.

Dokumentieren Sie den Beginn des Programmablaufs, indem Sie in die folgende Tabelle die ersten 12 Elemente in der Reihenfolge eintragen, in der sie in die Warteschlange **Q** hinein gelangen, und die Markierungen **m**, die die betreffenden Knoten im Laufe des Algorithmus bekommen!

Beachten Sie dabei die in den Adjazenzlisten vorhandene Reihenfolge!

Q	u_1	u_5	u_6	u_{10}	u_{12}	u_4	u_{14}	u_8	u_9	u_{15}	u_7	u_{16}
m	0	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4

Ermitteln Sie auf der Grundlage dieses Ergebnisses mittels des rückverfolgenden Algorithmus (Skript, S. 42) den kürzesten Weg vom Knoten $\mathbf{u_1}$ zum Knoten $\mathbf{u_7}$!

Beachten Sie dabei die in den Adjazenzlisten vorhandene Reihenfolge!

Dokumentieren Sie den Ablauf des Algorithmus in der folgenden Tabelle!

i	4	3	2	1	
$\mathbf{V_i}$	7	8	12	5	1

Fassen Sie den in der Tabelle ermittelten kürzesten Weg zusammen :

W = $u_1 u_5 u_{12} u_8 u_7$

16

Aufgabe 4 (16 Punkte):

Gegeben ist der paare Graph **G** in Bild 1 mit dem Matching

$\mathbf{M} = \{[a_1,b_1], [a_3,b_2], [a_5,b_4], [a_6,b_5]\}$.

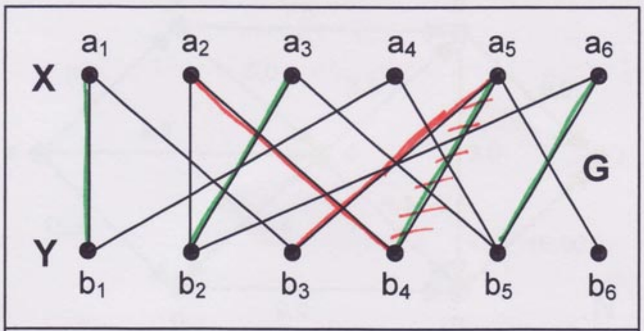


Bild 1

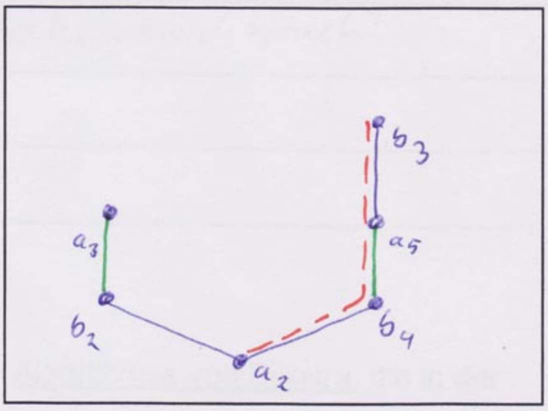
Verwenden Sie die Ungarische Methode, um die unten genannten Fragen zu beantworten!

Wählen Sie dabei im Falle mehrerer Auswahlmöglichkeiten immer den Knoten mit dem kleinsten Index!

a) Notieren Sie den Verlauf **bis zum Finden des ersten M-erweiternden Weges** in der folgenden Tabelle!

S	T	? =	P(S)	y ∈ P(S)	y M-ges.	y M-unges.
$\{a_2\}$	$\emptyset$	$\neq$	$\{b_2, b_4\}$	b_2	a_3	a_2
$\{a_2, a_3\}$	$\{b_2\}$	$\neq$	$\{b_2, b_4, b_5\}$	b_4	a_5	$\downarrow$
$\{a_2, a_3, a_5\}$	$\{b_2, b_4\}$	$\neq$	$\{b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$	b_3		b_3

b) Zeichnen Sie den **M**-alternierenden Baum, der dabei „wächst"!



c) Notieren Sie den ermittelten **M**-erweiternden Weg **W**!

W = $a_2 b_4 a_5 b_3$

d) Notieren Sie das auf dieser Grundlage ermittelte neue Matching $\mathbf{M_1}$!

$\mathbf{M_1}$ = $\{[a_2,b_4], [a_5,b_3], [a_1,b_1], [a_3,b_2], [a_6,b_5]\}$

Aufgabe 5 (12 Punkte):

12

Gegeben ist das Netzwerk **N** = (V,A,c) in Bild 2 mit der Quelle **s** und der Senke **t**, den eingetragenen Kapazitäten (1. Zahl) und dem eingetragenen Fluss $\mathbf{f_n}$ (2. Zahl).

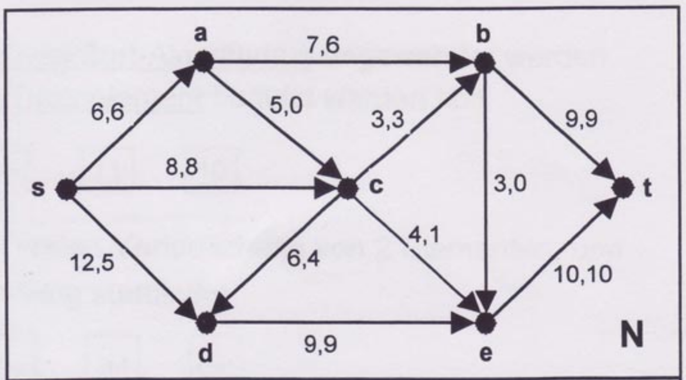


Bild 2

a) Welchen Wert hat der Fluss $\mathbf{f_n}$?

$\boxed{w(f_n) = 19}$

b) Ermitteln Sie die Mengen I_V und I_R, die der Algorithmus von Ford und Fulkerson in der oben abgebildeten Situation (Bild 2) verwendet!

I_V = {sd, ac, ab, cd, ce, be}

I_R = {A \ {ac, be}}

c) Versuchen Sie, den Fluss $\mathbf{f_n}$ mittels des Algorithmus von Ford und Fulkerson weiter zu vergrößern!
Dokumentieren Sie den Verlauf des Algorithmus in der folgenden Tabelle!

M'	s	d	~~a~~		c	e		M = M'
M	s	d	~~a~~	~~c~~	c	e		↳ kein durchbruch
m	∞	7	~~6~~	~~8~~	4	3		
B		sd	~~$\overleftarrow{sa}$~~	~~$\overleftarrow{sc}$~~	$\overleftarrow{dc}$	ce		

min: {∞,7} {∞,6} {∞,8} {7,4} {4,3}

Aufgabe 6 (2 Punkte):

1

Nennen Sie 2 aktuelle Anwendungsgebiete des Algorithmus von Dijkstra, die in der Vorlesung genannt wurden!

- Internet - Routing (OSPF-Protokoll)
- Navigationssysteme
- für eine Annäherungs Lösung für das Traveling Salesman Problem (TSP)

~~analog für~~
↳ ~~Annäherungs~~ Lösung für das Finden eines Hamilton-kreises f

Aufgabe 7 (4 Punkte):

Auf die folgende Eingabefolge soll der QuickSort-Algorithmus angewendet werden, wobei das letzte Element der Folge als Trennelement benutzt werden soll. 4

9	8	5	2	6	14	11	10

Notieren Sie die Eingabefolge nach der ersten Vertauschung von 2 Elementen, und begründen Sie, weshalb diese Vertauschung stattfindet!

9	8	5	2	6	10	11	14

Vom linken Ende aus gesucht ist das 1. Element, das größer oder gleich dem Trennelement 10 ist, die 14. Vom rechten Ende aus gesucht ist das 1. Element, das kleiner oder gleich dem Trennelement 10 ist, die 6. Weil die Zeiger sich treffen, wird das Trennelement an das linke ende der rechten Teilfolge getauscht.

Aufgabe 8 (4 Punkte):

Tom und Jerry unterhalten sich über einen Algorithmus. 4

Tom sagt: „Die Laufzeit dieses Algorithmus ist höchstens $\Omega(n \log n)$."

Jerry sagt: „Die Laufzeit dieses Algorithmus ist mindestens $O(n^2)$."

Kommt ein Wanderer des Weges und sagt: "Was seid ihr doch für Dummköpfe."

a) Wer hat Recht? Wanderer

b) Begründen Sie Ihre Antwort!

zu Tom: Die Ω-Notation beschreibt wie schnell ein Algorithmus mindestens wächst, also meint er entweder höchstens $\underline{O}(n \log n)$ oder mindestens $\Omega(n \log n)$.

zu Jerry: Wie bei Tom.
Die O-Notation beschreibt wie schnell ein Algorithmus höchstens wächst, also meint er entweder mindestens $\underline{\Omega}(n^2)$ oder höchstens $O(n^2)$.

der Wanderer: Wüsste das, Tom und Jerry nicht.