< 50 Punkte	=	5,0
50,5 - 52 Punkte	=	4,0
52,5 - 58 Punkte	=	3,7
58,5 - 64 Punkte	=	3,3
64,5 - 70 Punkte	=	3,0
70,5 - 76 Punkte	=	2,7
76,5 - 82 Punkte	=	2,3
82,5 - 88 Punkte	=	2,0
88,5 - 94 Punkte	=	1,7
94,5 - 99 Punkte	=	1,3
99,5 < Punkte	=	1,0

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	20	14
2	10	3
3	10	7
4	20	20
5	5	/
6	10	10
7	15	15
8	10	0
Bonus	30	19
Summe	130	88

1,7

1. Aufgabe (20 Punkte):

Kreuzen Sie die passende Antworten an! **Es kann nur eine Antwort richtig sein.** Ihre Entscheidung brauchen Sie nicht zu begründen!

1.1. (2 Punkte) Welche der Funktionen ist ungerade, d.h. es gilt $f(x) = -f(-x)$?

☐ $f(x) = -\frac{3}{(x+1)^5}$ ☒ $f(x) = -\frac{3}{x^5}$ ☐ $f(x) = \frac{3}{x^5} - 1$ ☐ $f(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^5}$.

1.2. (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.

☐ $f \circ g$ ist streng monoton fallend
☐ $g \circ f$ ist monoton wachsend
☒ $f \circ g$ monoton fallend
☐ $g \circ f$ ist konstant.

1.3. (2 Punkte) Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist

☐ streng monoton fallend, beschränkt und konvergent.
☒ streng monoton wachsend, beschränkt und konvergent.
☒ streng monoton wachsend, nicht beschränkt und nicht konvergent.
☐ nicht monoton, aber beschränkt und konvergent.

1.4. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - 6n^5}{(-5)^n + 3n^4} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{10}}{\log n} = 0$$

1.5. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^5 + x^4}{3x^4 - 5x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-6x^5 + x^4}{3x^4 - 5x^2} = \infty$$

1.6. (2 Punkte) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$B^T A =$

	1	2
	-3	4
	0	-1
-3 1 4	-6	-6
2 -1 0	5	0

$= \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

☐

1.7. (2 Punkte) Ergänzen Sie:

Die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ beträgt $3a^2 + 3a + 3$

Die Inverse der Matrix A existiert daher für $a \in$ $\mathbb{R} \setminus \cancel{\{0\}}$

setzen Sie $a=0$ ein $\Rightarrow \det A = 3$ also passt auch ✓

1.8. (2 Punkte) Mit welchem Vektor bilden $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Basis in $\mathbb{R}^3$?

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.9. (2 Punkte) Die Geraden

$$g_1 : \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \left(\boldsymbol{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 0.$$

☐ stimmen überein.

☐ stehen senkrecht zueinander.

☒ haben gar keinen Schnittpunkt.

☐ haben genau einen Schnittpunkt aber stehen nicht senkrecht aufeinander.

1.10. (2 Punkte) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche der Aussagen ist **nicht äquivalent** zu den übrigen drei?

☐ Die Spalten von A bilden ein System von linear unabhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^n$.

☐ $\det A \neq 0$.

☐ A ist invertierbar.

☒ Das homogene Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, ist lösbar.

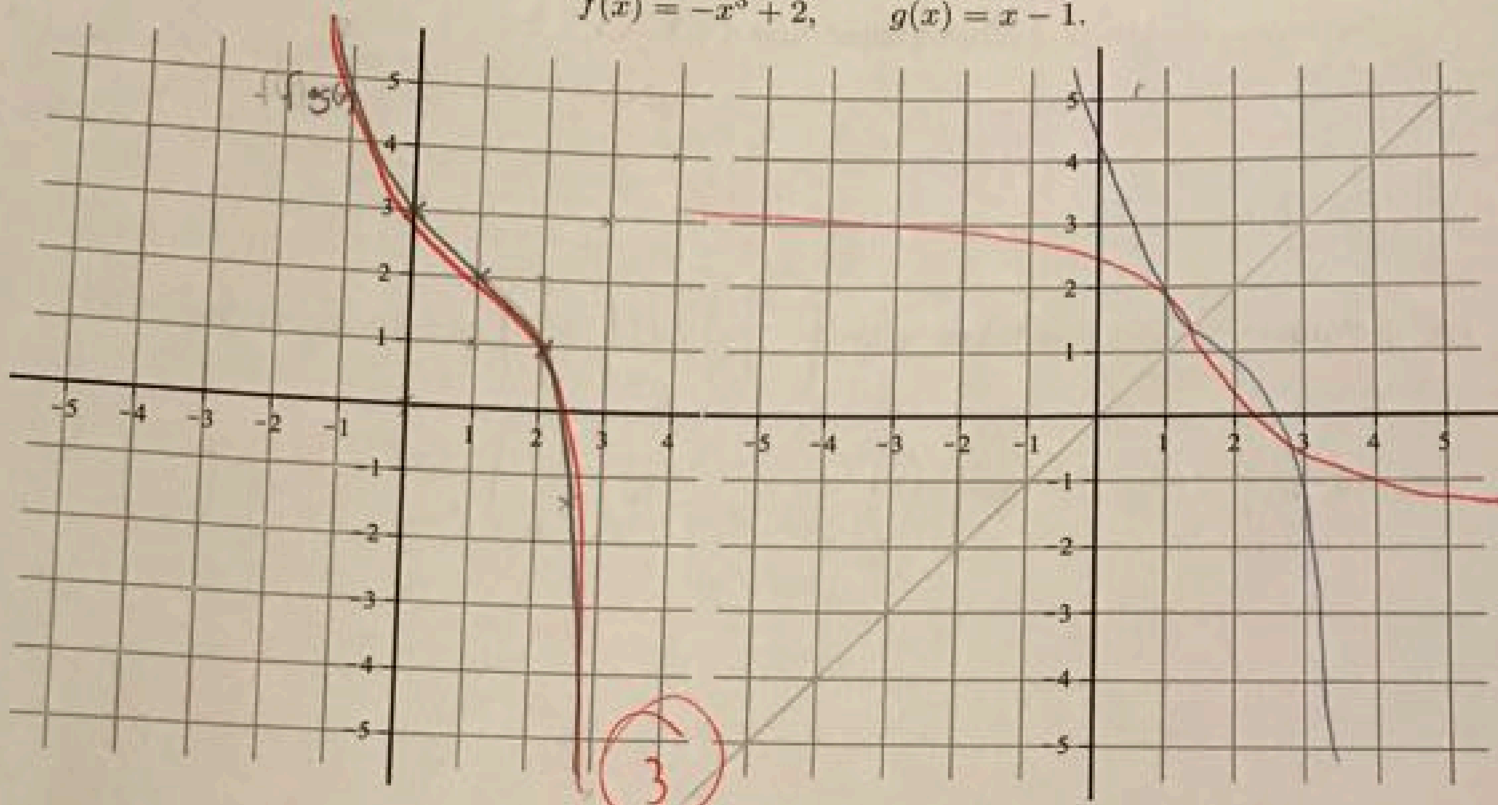
✓

A 2

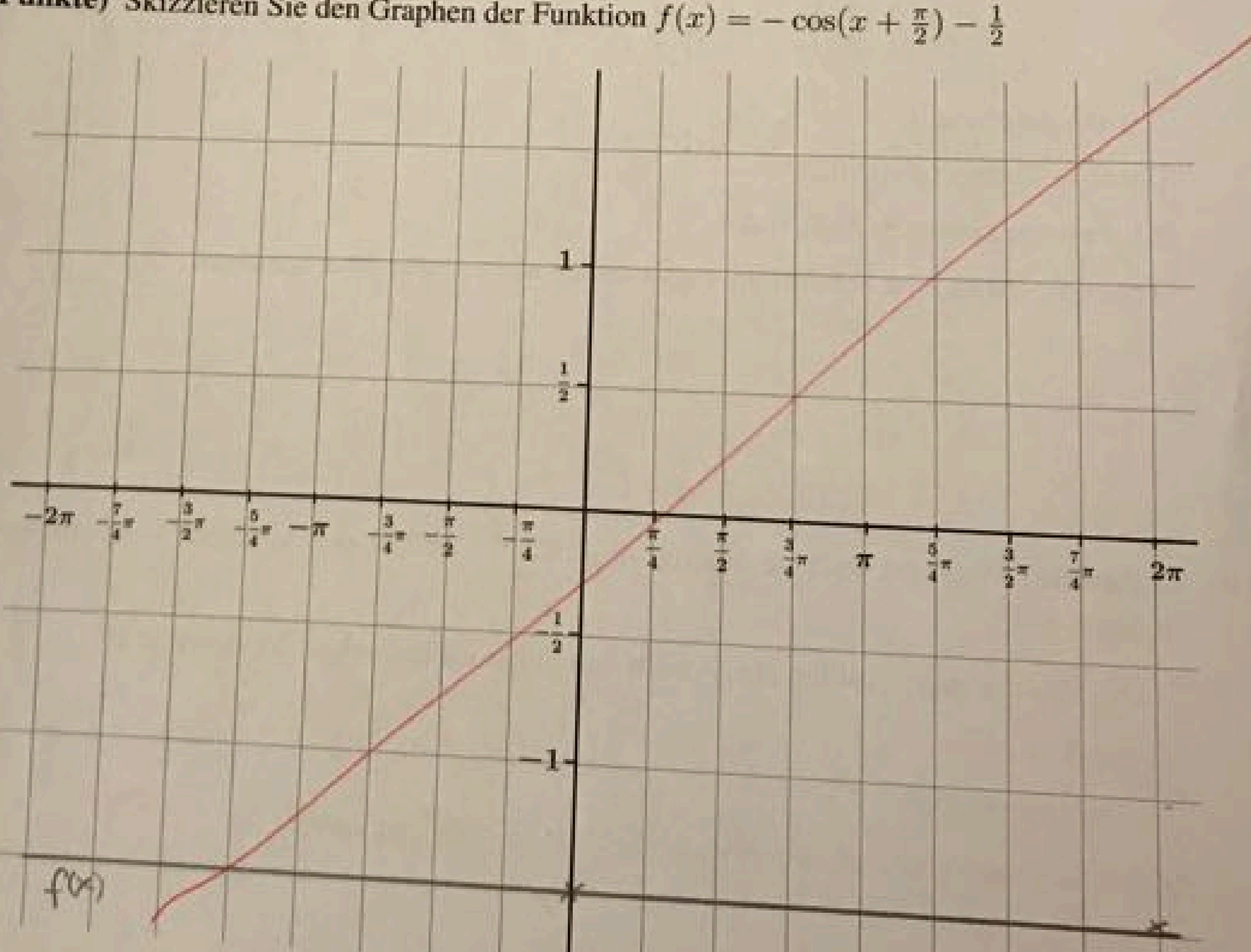
2. Aufgabe (10 Punkte):

2.1. (6 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen der Komposition $f \circ g(x)$ (links) und ihrer Inversen (rechts), wenn

$$f(x) = -x^3 + 2, \qquad g(x) = x - 1.$$



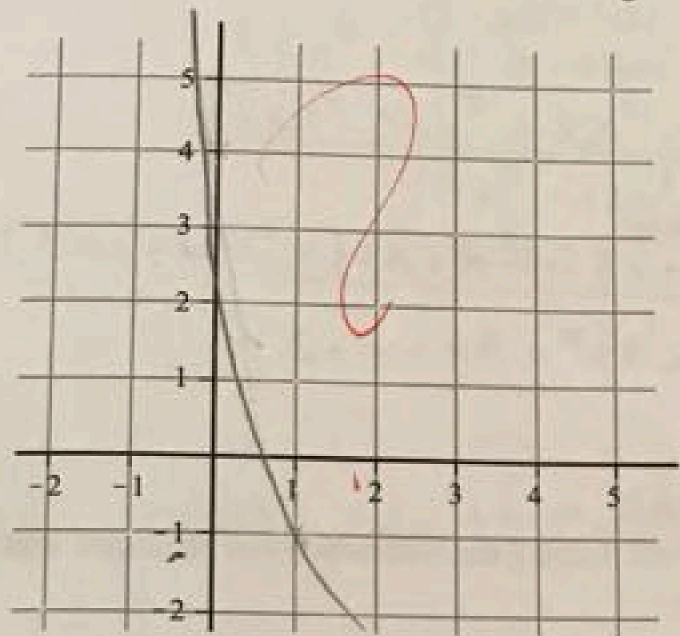
2.2. (4 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}$



☐

3. Aufgabe (10 Punkte):

3.1. (6 Punkte) Lösen Sie grafisch und algebraisch die Ungleichung $|-3x+3| \leq 2x-1$.



$|-3x+3| \leq 2x-1 \quad | -2x+1$

$|-3x+3| - 2x+1 \leq 0$

~~2 Fälle zu betrachten:~~

1. $\cancel{-3x+3 > x \geq 0}$ $\quad -3x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

$-3x+3-2x+1 \leq 0$

$-5x+4 \leq 0 \quad | +5x$

$4 \leq 5x \quad | :5$

$\frac{4}{5} \leq x$ ✓ $\quad$ zusammen führen. $\quad]\frac{4}{5}, 1]$

$-3x+3<0 \Leftrightarrow x>1$

2. $-(-3x+3)-2x+1 \leq 0$

$3x-3-2x+1 \leq 0$

$x-2 \leq 0 \quad |+2$

$x \leq 2 \quad]1,2]$

3

$\cancel{x \in [}$ $\quad \frac{4}{5} \leq x \leq 2$

Wie kommen Sie darauf

3.2. (4 Punkte) Geben Sie den Gültigkeitsbereich an und lösen die Gleichung

$$\sqrt{4x+13} = 2x-1. \quad |^2$$

$4x+13 = (2x-1)^2$ Bleistift!

$4x+13 = 4x^2-4x+1$

$0 = 4x^2-8x-12 \quad |:4$

$0 = x^2-2x-3$

$x_{1|2} = 1 \pm \sqrt{1^2+3}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$

Gültigkeitsbereich: $4x+13 \geq 0$ und $2x-1 \geq 0$

Lösung: $x_1 = 3$ (x_2 keine Lösung, da nicht im Gültigkeitsbereich)

4

4. Aufgabe (20 Punkte):

Gegeben seien Funktionen:

$$p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 26x - 12$$
$$q(x) = -(x-1)(x+1)(x+3)$$
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

4.1. (2 Punkte) Bringen Sie $q(x)$ in die Summendarstellung.

$q(x) = -(x-1)(x+1)(x+3) = (-x+1)(x^2+3x+x+3)$

$= -x^3 - 3x^2 - x^2 \cancel{-3x} + x^2 + 3x + x + 3$

$q(x) = -x^3 - 3x^2 + x + 3$ 2

4.2. (4 Punkte) Zeigen Sie mittels Horner-Schema, dass -3, 1 und 2 die Nullstellen von $p(x)$ sind, und bringen Sie $p(x)$ in die Produktdarstellung.

	2	-2	-14	26	-12
+		2	0	-14	12
1	2	0	-14	12	0
+		-6	18	-12	
-3	2	-6	4	0	
+		4	-4		
2	2	-2	0		

$p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 26x - 12$

$p(x) = (x-1)(x+3)(x-2)(2x-2)$

$p(x) = 2(x-1)^2(x+3)(x-2)$

4

4.3. (4 Punkte) Geben Sie den Definitionsbereich, die Definitionslücken und die Nullstellen von f an. Bei den Definitionslücken unterscheiden Sie zwischen Polstellen und hebbaren Singularitäten.

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2(x+3)(x-2)}{-(x-1)(x+1)(x+3)}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$ ✓

Polstelle: ~~$x_1 = -3$~~ $x_1 = -1$ ✓

hebbare Singularitäten: $x_2 = \cancel{-1}\ -3$ $x_3 = 1$ ✓

Nullstellen $x_4 = +2$ ✓

4

☐

4.4. (3 Punkte) Stellen Sie die Funktion $f(x)$ in der Form $f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ dar, dabei ist $g(x)$ der ganze Anteil und $r(x)$ das Restpolynom von $f(x)$.

$$(2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 26x - 12) : (-x^3 - 3x^2 + x + 3) = -2x + 8$$
$$-(2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 6x)$$
$$-8x^3 - 12x^2 + 32x - 12$$
$$-(-8x^3 - 24x^2 + 8x + 24)$$
$$12x^2 + 24x - 36$$

$$f(x) = -2x + 8 + \frac{12x^2 + 24x - 36}{-x^3 - 3x^2 + x + 3}$$

$x \to \infty$

0

3

4.5. (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Verwenden Sie jeweils die entsprechende Form von $f(x)$, um den Grenzwert schnell zu ermitteln.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x-1)^{\cancel{2}}\cancel{(x+3)}(x-2)}{-\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x+3)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x-1)(x-2)}{-(x+1)} = +\infty \quad ✓$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-1)(x-2)}{-(x+1)} = -\infty \quad ✓$$

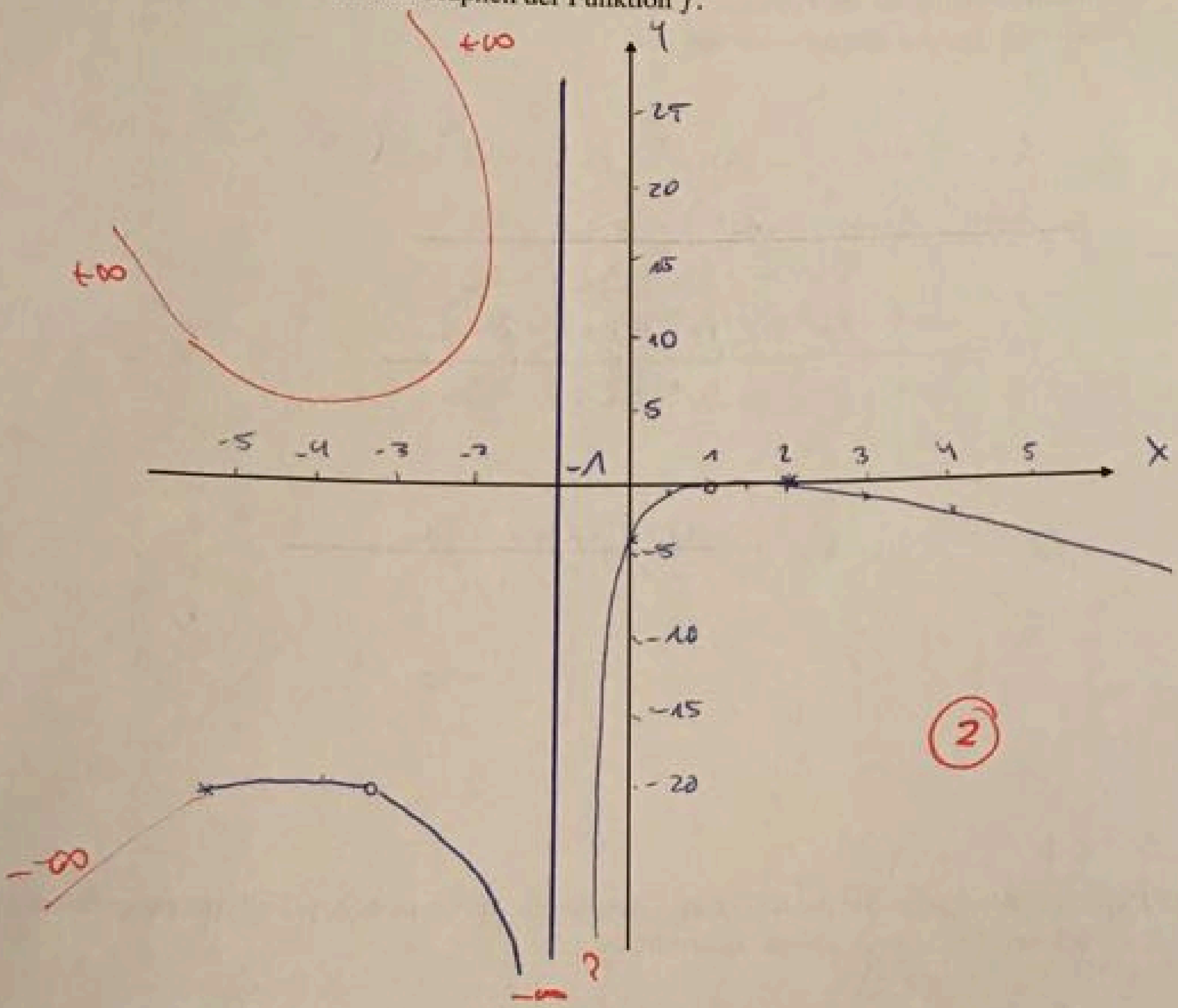
$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{2(x-1)(x-2)}{-(x+1)} = 0 \quad ✓$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2(x-1)(x-2)}{-(x+1)} = +\infty \quad ✓$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2(x-1)(x-2)}{-(x+1)} = -\infty \quad ✓$$

5

4.6. (2 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.



5. Aufgabe (5 Punkte):

Gegeben sei die Folge $125, -50, 20, -8 \ldots$.

5.1. (2 Punkte) Geben Sie die explizite und rekursive Definition dieser Folge an.

5.2. (3 Punkte) Ist diese Folge monoton, beschränkt, konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

☐

6. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben seien Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

6.1. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren eine Basis in $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 6 & 2 & -2 & 6 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 4 & 3 \end{array}\right| = 0 + 96 + 30 - 0 + 24 + 120 = 270$$

→ linear unabhängig

2

6.2. (3 Punkte) Ist diese Basis orthogonal?

$a \cdot b = -12 + 0 + 12 = 0$

$a \cdot c = -4 + 20 - 16 = 0$

$b \cdot c = 12 + 0 - 12 = 0$

Die Basis ist orthogonal, da alle Vektoren paarweise senkrecht zueinander sind.

2

6.3. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $d = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis. Lösen Sie hierzu das folgende Gleichungssystem mit dem **Gauß-Algorithmus.**

−2	6	2	−6	
5	0	4	6	5·I + 2·II
4	3	−4	12	2·I + III
−2	6	2	−6	
0	30	18	−18	wozu? Um falsch abzuschreiben?! :-)
0	15	0	0	
−2	6	2	−6	
0	15	0	0	
0	30	12 ?	−18	III − 2·II
−2	6	2	−6	→ $-2x_1 - 3 = -6 \Rightarrow \frac{3}{2} = x_1$
0	15	0	0	→ $15x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$
0	0	12	−18	→ $12x_3 = -18 \quad x_3 = -\frac{3}{2}$

$d = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}c$

#

5

7. Aufgabe (15 Punkte):

Eine Ebene E sei auf den drei Punkten $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gestützt.

7.1. (2 Punkte) Geben Sie die Parametergleichung der Ebene E an.

$$E:\ c + \alpha(a-c) + \beta(b-c)$$

$$E:\ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} +5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2

7.2. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Vektor $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E ist.

$$n = (a-c) \times (b-c) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} +5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9 \\ -15+16 \\ 12-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2

7.3. (2 Punkte) Geben Sie die Normalengleichung der Ebene E an.

$$E:\ \left(p - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

2

7.4. (2 Punkte) Geben Sie die Summendarstellung der Ebene E an.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$$E:\ \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3p_1 \\ 0 \\ 2p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0}$$

$$\begin{pmatrix} p_1+3 \\ p_2 \\ p_3+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$E:\ p_1 + 3 + p_2 + 2p_3 - 4 = 0$$

$$p_1 + p_2 + 2p_3 + 1 = 0$$

2

7.5. (2 Punkte) Geben Sie die Parameterdarstellung der Geraden g an, die durch den Punkt $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene E verläuft.

$$g: d + \lambda n = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2

7.6. (3 Punkte) Bestimmen Sie den Schnittpunkt s der Geraden g und der Ebene E.

$s = p$

$$s = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7.7. (2 Punkte) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\boldsymbol{d}$ zur Ebene E.

Hinweis: Das ist der Abstand zwischen $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{s}$.

$$\lambda_p = \frac{(c-d)\cdot n}{\|n\|^2} = \frac{\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1-1-12}{6}$$

$$\lambda_p = \frac{-12}{6} = -2 \qquad p = d + \lambda_p n \qquad p = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3

$$\|p - \boldsymbol{d}\| = \|\lambda_p n\| = \left\|-2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90$$

2

8. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben seien Transformationen $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Dabei ist T_1 durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

gegeben und T_2 bildet einen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf den Punkt $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ -x + 2y + 3z \\ x - y + z \end{pmatrix}$ ab.

8.1. (2 Punkte) Auf welchen Punkt wird $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ unter T_1 abgebildet?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24y \\ -5z \end{pmatrix} \; ?$$

8.2. (2 Punkte) Geben Sie die Matrix der Transformation T_2 an.

$\cancel{2yx\ {+}x\ z}$

$\cancel{-xy\ {+}2y}$

8.3. (2 Punkte) Ist T_2 injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

8.4. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Matrix der Transformation T, in der zuerst T_2 und dann T_1 ausgeführt wird. Wie lautet das Bild vom Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ unter T?

☐