Mathematik 2: Klausur 1

Wintersemester 2006/2007, TFH Berlin, Dr. U. Rothkirch

3. Februar 2007

Name: **Vorname:** **Matrikel-Nr.:**

Letzter Versuch gemäß § 12 RPO II? ~~**ja**~~ **nein**

Ergebnis: **Punkte** **Note:**

Die Maximalpunktzahl beträgt 60 Punkte.

Punktverteilung

Aufgabe 1:	von 5	Aufgabe 5:	von 10	Aufgabe 9:	von 4
Aufgabe 2:	von 5	Aufgabe 6:	von 5		
Aufgabe 3:	von 7	Aufgabe 7:	von 8		
Aufgabe 4:	von 8	Aufgabe 8:	von 8		

Klausuraufgaben

1. Es sei E eine nichtleere Grundmenge. Überprüfen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage:

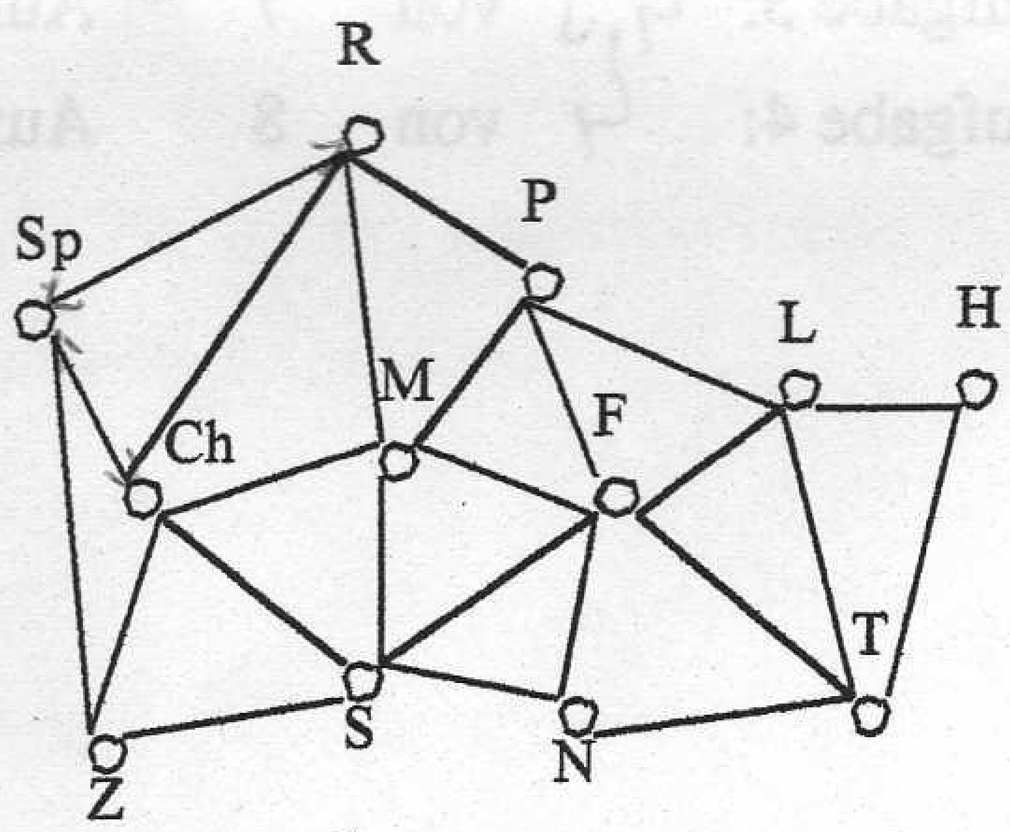
$$\bigwedge_{A,B\in P(E)} \left(\overline{A \diamond B} = \overline{A} \diamond \overline{B}\right)$$

2. Es sei $(B, +, *, \bar{\ }, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra.
Beweisen Sie die folgende Aussage: wahrheitstab.!!

$$\bigwedge_{u,v\in B} (u + v = 0 \rightarrow u = 0 \wedge v = 0)$$

3. Gegeben sei die Menge $A = \{0, 1, 2, 3\}$ und eine Relation $R \subseteq A \times A$ mit Teilmenge
$R = \{(x; y) \in A \times A: \bigvee_{k\in\mathbb{N}} (x + k = y)\}$. $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl Null, d.h. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
   a) Zeichnen Sie den Digraphen von R!
   b) Untersuchen Sie, ob R eine irreflexive partielle Ordnung ist!

4. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Digraphen einer Relation V auf der Menge
$A = \{Sp, Z, Ch, R, M, S, P, F, N, L, T, H\}$.
Für $(X; Y) \in V$ sagt man, dass X und Y zueinander benachbart sind. Alle Kanten des Digraphen verlaufen in beiden Richtungen. Daher wurden die Pfeile weggelassen.



Man beobachtet die folgenden Eigenschaften:
   a) Zu allen Knoten X und Y, die zueinander benachbart sind, gibt es einen weiteren, von X und Y verschiedenen Knoten, der sowohl zu X als auch zu Y benachbart ist.
   b) Gibt es zu zwei zueinander benachbarten Knoten X und Y zwei verschiedene Knoten Z_1 und Z_2, die sowohl zu X als auch zu Y benachbart sind, so sind Z_1 und Z_2 nicht zueinander benachbart.

Formulieren Sie die Eigenschaften a) und b) in der formalen Sprache der Prädikatenlogik! Hinweis: Statt $(X; Y) \in V$ kann man auch XVY schreiben.

0, 1 01, 00, 11 111, 000, 010, 011

5. Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen, die nur aus den Ziffern 0 und 1 bestehen und höchstens dreistellig sind.

a) Welche Mächtigkeit hat die Menge M? 8 Stück!

b) Die Funktion q von M in $\mathbb{N}_0$ ordnet jedem Element von M seine Quersumme zu. Geben Sie an, ob q injektiv ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

c) Die Relation $R \subseteq M \times M$ sei durch $R = \{(x; y) \in M \times M: q(x) < q(y)\}$ definiert. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Relation R!

6. Gegeben sind die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und die Adjazenzmatrizen zweier Relationen $R \subseteq M \times M$ und $S \subseteq M \times M$:

$$A(R) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}; \quad A(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie an, welche der Adjazenzmatrizen zu einer Permutation gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Geben Sie zu der Permutation aus a) die Standarddarstellung an und ermitteln Sie, ob sie gerade oder ungerade ist!

7. Eine Funktion f von $\mathbb{N}_0$ auf $\{0, 1\}$ ist durch die Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls x durch 2 oder durch 5 teilbar ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist, indem Sie eine Substitutionsdarstellung angeben oder ein Normalschema der primitiven Rekursion!

b) Geben Sie zu Ihrer Darstellung aus a) die Kurzschreibweise an!

c) Falls Sie a) nicht lösen konnten, geben Sie die Kurzschreibweise der Funktion g mit dem folgenden Normalschema der primitiven Rekursion an:

$$g(x, 0) = \text{prod}(I_1^1(x), I_1^1(x))$$

$$g(x, y + 1) = \overset{c_0,}{\underset{1.}{\text{N}}}(I_3^3(x, y, g(x, y))) + \text{prod}(c_2(I_3^3(x, y, g(x, y))), I_2^3(x, y, g(x, y)))$$

2. 3.

Hinweis: Die Punkte aus den Teilaufgaben b) und c) werden nicht addiert. Sie erhalten das Maximum der in beiden Teilaufgaben erzielten Punkte. Bei Teilaufgabe b) ist ein Punkt mehr zu erreichen.

8. Beweisen Sie die Richtigkeit der Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}!$$

9. Bei einem Einkauf im Getränkemarkt sind 4 Flaschen Saft auszuwählen. Der Kunde hat Orangensaft, Apfelsaft, Grapefruitsaft, Birnensaft, Tomatensaft und Traubensaft zur Auswahl. Wie viele verschiedene Zusammenstellungen für einen Einkauf von 4 Flaschen Saft sind mit diesem Angebot möglich?

(Es werde vorausgesetzt, dass von jeder Saftsorte genügend Ware vorhanden ist. Es genügt die Angabe einer Formel zur Berechnung der gesuchten Anzahl.)