Mathematik II

Bachelor Medieninformatik
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Marlene Müller
[redacted]

Klausur 20. Juli 2017

ein A4-Blatt mit selbst zusammengestelltem Inhalt,
Taschenrechner, permanente Schreibstifte, leere Schreibblätter

Bitte verwenden Sie keinen Bleistift zum Schreiben und keine Korrekturmittel (Tipp-Ex etc.). Notieren Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedem Blatt, das Sie abgeben. Kennzeichnen Sie bitte auch klar, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Die Bearbeitungszeit beträgt 105 Minuten. Zum Bestehen der Klausur sind 48 Punkte notwendig. Ihre Bonuspunkte werden angerechnet.

Wichtig: Geben Sie bitte bei allen zu berechnenden Größen auch Ihre verwendete Berechnungsformel mit an oder erläutern Sie ggf. kurz Ihren Lösungsweg.

Bitte folgendes Feld für die Auswertung freilassen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	[+Bonus]	Summe
Punkte	12	11	11	14	10	11	13	10	9	101
max. Punkte	12	11	11	18	12	11	13	12	[+10]	100

Note: 1,0

Aufgabe 1 (12 P.)
Wir betrachten die folgenden Vektoren:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erinnerung: Begründen Sie jeweils Ihre Antwort bzw. geben Sie einen Rechenweg an!

(a) Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$.

(b) In welchem Winkel stehen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ zueinander? Geben Sie das Ergebnis sowohl im Grad- als auch im Bogenmaß an.

(c) Sind die beiden Vektoren $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{x}$ linear unabhängig?

(d) Sind alle vier Vektoren linear unabhängig?

Aufgabe 2 (11 P.)

(a) Berechnen Sie alle Werte $c \in \mathbb{R}$, für die das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gleich 2 ist:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2c \\ c \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems. Geben Sie dabei Ihre verwendeten Umformungen an!

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 3 (11 P.)
Gegeben sind zwei Geraden in Parameterform:

$$\begin{aligned} g(r) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R} \\ h(s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die beiden Geraden.

(b) Stellen Sie (durch geeignete Rechnung) fest, ob der Punkt mit den Koordinaten $(2, 4)$ auf der Gerade h liegt.

(c) Stellen Sie (durch geeignete Rechnung) fest, ob die beiden Geraden senkrecht zueinander stehen.

(d) Stellen Sie fest, ob die beiden Geraden sich schneiden und wenn ja, berechnen Sie diesen Schnittpunkt.

Aufgabe 4 (18 P.)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie (sofern möglich) die Matrixprodukte

$$AB, \quad BC, \quad CD, \quad DA.$$

Falls die Berechnung nicht möglich ist, geben Sie die Begründung dafür an.

(b) Berechnen Sie außerdem (sofern möglich) die Ausdrücke

$$A + A^\top, \quad A^\top + B, \quad (2C)^{-1}.$$

Falls die Berechnung nicht möglich ist, geben Sie die Begründung dafür an.

(c) Bestimmen Sie die Inverse von D nach dem Gauß-Jordan-Verfahren.

Aufgabe 5 (12 P.)

Wir betrachten die Zahlenfolge:

$$x_n = \frac{n^2}{2(n+1)^2} \qquad (\text{für } n \in \mathbb{N})$$

(a) Geben Sie die ersten 4 Werte der Folge an.

(b) Ist die Folge beschränkt? Wenn ja, durch z.B. welche Schranken? (Begründen Sie!)

(c) Ist die Folge monoton? Wenn ja, in welcher Weise?

(d) Ist die Folge konvergent? Wenn ja, weshalb? Bestimmen Sie in diesem Fall den Grenzwert.

Aufgabe 6 (11 P.)

Wir betrachten das Polynom:

$$p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$$

(a) Überzeugen Sie sich, dass 1 eine Nullstelle des Polynoms ist.

(b) Zeigen Sie mittels Polynomdivision, dass sich das Polynom in die Form

$$p(x) = (x-1)(2x^2 - 3x - 2)$$

bringen lässt. (Schreiben Sie die Polynomdivision nachvollziehbar auf.)

(c) Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen und bringen Sie das Polynom in die Produktdarstellung.

(d) Skizzieren Sie das Polynom.

Aufgabe 7 (13 P.)

Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f(x) = \ln(2x) - 3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = e^{x-1} + 4$$

(a) Geben Sie für beide Funktionen jeweils den (maximal möglichen) Definitionsbereich und den dazugehörigen Wertebereich an.

(b) Untersuchen Sie, ob beide Funktionen jeweils Nullstellen haben. Wenn ja, berechnen Sie diese.

(c) Ist die Funktion $g(x)$ umkehrbar? Wenn ja, geben Sie die entsprechende Umkehrfunktion sowie den zur Umkehrfunktion gehörenden Definitionsbereich und den dazugehörigen Wertebereich an.

(d) Ist die Funktion $g(x)$ stetig in ganz $\mathbb{R}$? (Begründen Sie!)

Aufgabe 8 (12 P.)

Betrachten Sie die Funktion:

$$r(x) = \frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{x(x^2-1)}$$

(a) Geben Sie den Definitionsbereich an.

(b) Hat die Funktion Definitionslücken? Wenn ja, welche sind davon hebbar? Hat die Funktion eine oder mehrere Polstellen?

(c) Welche Nullstellen hat die Funktion?

(d) Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktion für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Aufgabe 1

a) $|u| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ ✓

$|v| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

b) $\cos(\alpha) = \frac{v \circ w}{|v| \cdot |w|}$ $\qquad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v \circ w}{|v| \cdot |w|}\right)$

$v \circ w = -2 \cdot 2 = -4$ ✓ $\qquad$ ~~$|v| = 3$~~ $\quad |w| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{16 + 1 + 4}$

$= \sqrt{21}$ ✓

$|v| \cdot |w| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{21} = \sqrt{13 \cdot 21} = \sqrt{273}$

$\frac{v \circ w}{|v| \cdot |w|} = \frac{-4}{\sqrt{273}}$

✓

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{273}}\right) \approx 1{,}815$ ✓ oder $104{,}01°$

c) ~~$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$~~ 0

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 4c = 0 \\ -c = 0 \\ 0 = 5 \ ↯ \\ 2c = 0 \end{array}$ $\Rightarrow$ w und x sind linear unabhängig ✓

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \left(+2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)$

$= 5 \cdot 2(-2-4) = 5 \cdot 2 \cdot (-6)$ ✓

$= -60$ ✓ $\Rightarrow \neq 0$

Die Derminante ist $\neq 0$, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. ✓

Aufgabe 2

a) $-2 + 2c^2 + 2c^2 = 2 \Rightarrow 4c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 1$ ✓

$c_1 = -1 \quad c_2 = 1$ ✓

[redacted]

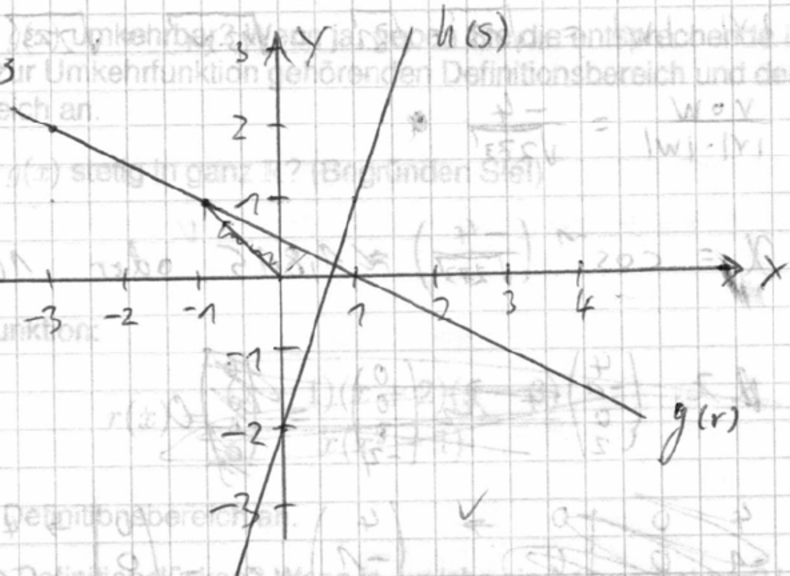
b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 6\text{II} - \text{I} \\ 2\text{III} + \text{I} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 15 & -13 & 17 \\ 0 & -7 & 13 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 15\text{III} + 7\text{II} \end{array}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 15 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 104 & 104 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow 6x_1 - 6 + 1 = -5 \rightarrow 6x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ \rightarrow 15x_2 - 13 = 17 \rightarrow 15x_2 = 30 \rightarrow x_2 = 2 \\ \rightarrow 104x_3 = 104 \rightarrow x_3 = 1 \end{array}$ ✓

$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ✓

Aufgabe 5

a)



✓

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 - s = 2 \rightarrow s = -1 \\ 1 - 3s = 4 \rightarrow s = -1 \end{array}$

ja liegt er! ✓

c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + (-3) = 0 \rightarrow -1 = 0$ ↯ ✓

Die Geraden stehen nicht senkrecht zu einander. ✓

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 - 2r = 1 - s \\ 1 + r = 1 - 3s \end{array}$

$-1 - 2r = 1 - s \rightarrow -2r = 2 - s \rightarrow r = \frac{2-s}{-2}$

$1 + r = 1 - 3s \rightarrow -3s = r \rightarrow r = -3 \cdot \frac{2}{7} = -\frac{6}{7}$ ✓

$\Rightarrow -3s = \frac{2-s}{-2} \rightarrow 6s = 2 - s \rightarrow 7s = 2 \rightarrow s = \frac{2}{7}$

$h\left(\frac{2}{7}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \\ y = 1 - \frac{6}{7} = \frac{7}{7} - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \end{array}$

Schnittpunkt $= \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ ✓

Aufgabe 4

$2\times3 \cdot 3\times2$ passt!

a) $A \cdot B$ nicht mögl. da Spalten / Zeilen nicht kompatibel f

$B \cdot C$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix} \end{array}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$C \cdot D$ ist gleicher Fall wie $A \cdot B$

$D \cdot A$ ist gleicher Fall wie $A \cdot B$

also nicht möglich, da Größen nicht passen

b) $A + A^T$ nicht mögl. (siehe $A \cdot B$)

$A^T + B$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$(2C)^{-1}$ $\quad 2C = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (2C)^{-1} = \frac{1}{-20-24} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$

$$(2C)^{-1} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{III} + 5\text{I}$$

Von $(A|E)$ starten! $\overset{\parallel}{D}$ hier

$$= \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & & \end{array}$$

Achtung: hier ist Zeilen tauschen nicht erlaubt! (nur in [A| zusammen

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{II} + 5\text{I}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{I} + \text{III} \\ \text{II} + 5\text{III} \end{matrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 5\text{I} - \text{II} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} :-5 \\ :-5 \\ : \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & -4 \\ -1 & -1/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{für } D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -1 & -1/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[redacted]

Aufgabe 5)

a)

n	1	2	3	4
x_n Wert	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{16}{72}$
	0,125	0,22	0,28	0,22

✓

b) die untere Schranke ist 0 ✓ (warum?)

eine obere Schranke ist 1 ✓
(der Wert wird nie größer 1)

c) Die Folge ist nicht monoton f

d)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2(n+1)^2}\right) = \frac{n^2}{2(n^2+2n+1)} = \frac{n^2}{2n^2+4n+2}$$

$$= \frac{n^2}{n^2(2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{2} \quad ✓$$

Die Folge ist konvergent, siehe Grenzwert. (sie hat einen) ✓

Aufgabe 6)

✓

a) $p(1) = 0 \rightarrow 2\cdot 1^3 - 5\cdot 1^2 + 1 + 2 = 0 \rightarrow 2 - 5 + 1 + 2 = 0 \rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$

b)
$$\begin{aligned}
&2x^3 - 5x^2 + x + 2 : (x-1) = 2x^2 - 3x - 2\\
-&(2x^3 - 2x^2)\\
&\quad -3x^2 + x\\
&\quad -(-3x^2 + 3x)\\
&\qquad -2x + 2\\
&\qquad -2x + 2\\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$
✓

$a = 2 \quad b = -3 \quad c = -2$

c) $x_{1/2} = -\frac{-3}{4} \pm \frac{\sqrt{9 - 4(-4)}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{25}}{4}$

$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$ ✓

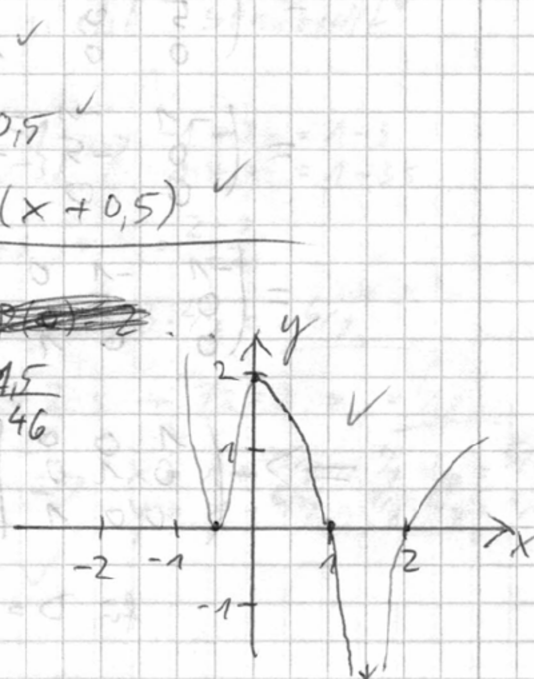
$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{2}{4} = -0{,}5$ ✓

$2(x-1)(x-2)(x+0{,}5)$ ✓

d) NS: 1, 2, −0,5 ~~P(0)~~

x	−2	−1	0	0,5	1,5
$P(x)$	−36	−6	2	1,5	−46

✓



Aufgabe 7

a) $\ln(2x) - 3$ $\quad$ Def: $(0, \infty)$ $\quad$ $W_f = \mathbb{R}$

$e^{x-1} + 4$ $\quad$ Def: $\mathbb{R}$ $\quad$ $W_f = (4, \infty)$

b) $0 = \ln(2x) - 3 \rightarrow 3 = \ln(2x) \mid e^{\dots} \rightarrow e^3 = 2x \rightarrow x = \frac{e^3}{2}$

Nullstelle bei $x = e^3/2$

$e^{x-1} + 4$ hat keine NS, da e^x keine hat und das $+4$ die Funktion nach oben hebt ($x-1$ ist eine rechts Verschiebung auf d.. x-Achse)

c) $y = e^{x-1} + 4 \rightarrow y - 4 = e^{x-1} \mid \ln(\dots) \rightarrow \ln(y-4) = x - 1$

$\rightarrow x = \ln(y-4) + 1 \rightarrow$ Umkehrfkt: $g(x) = \ln(x-4) + 1$

Def: $(4, \infty)$ $\quad$ $W_f = \mathbb{R}$

d) ja sie stetig, weil man jeden ~~x~~ Wert ($\in \mathbb{R}$) in x einsetzen darf

Aufgabe 8

a) Nenner: $x(x-1)(x+1)$

Def: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ (und $x \neq 0$ auch noch)

b) Lücken $x = 1$ ist hebbar da $(x-1)$ sowohl im Nenner als auch Zähler vorkommt

$x = -1$ ist nicht hebbar $\rightarrow$ Polstelle
auch bei $x = 0$

c) Nullstellen: $\{-2, 3\}$

d) NR: $(x-1)\cdot(x+2) = x^2 + x - 2 \cdot (x-3) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + \dots$

$= x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

NR: $x(x^2 - 1) = x^3 - x$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - x} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3(1 - 2/x - 5/x^2 + 6/x^3)}{x^3(1 - 1/x^2)} \right)$$

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3(1 - 2/x - 5/x^2 + 6/x^3)}{x^3(1 - 1/x^2)} \right) = 1$$