Prof.Dr.Göbel	Mathematik 2 MD 2	WS 2007/2008
	Prüfung A zum Abschluss des Semesters	

Name	Codewort	Matr.-Nr.
[redacted]		
Letzte Wiederholung der Prüfung gemäß RPO	O Ja	☒ Nein

Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln bearbeitet habe.

Unterschrift :

Verwenden Sie nur diese Blätter für Ihre Berechnungen und Lösungen.

Alle Ihre Schritte müssen begründet werden und nachvollziehbar sein!
Bitte tragen Sie Ihre Ergebnisse in die doppelt umrandeten Kästchen ein.

Punkte

1. Aufgabe	18	15,5	
2. Aufgabe	13	8	
3. Aufgabe	15	15	
4. Aufgabe	16	12,5	
5. Aufgabe	10	10	
Gesamt	72	61	51
		1,0	1,0

Maximal 60 Punkte werden gewertet. Bei mindestens 27 Punkten: bestanden!

Note 1,0 Göbel

Prima!

Zuerst:
Genau lesen

Dann:
Denken

Dann:
Viel Erfolg!

1. Kleinaufgaben. Begründungen sind hier nicht notwendig!

(a) Auf der Menge M = { 1, 2, 3, 4, 5 } wird die Relation R betrachtet:

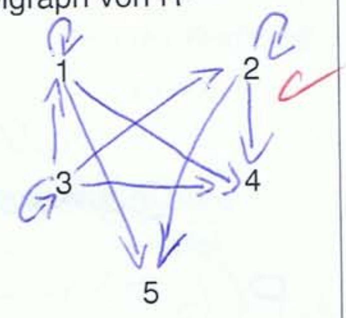
R = { (1,2) , (1,4) , (2,1) , (2,4) , (3,2) , (3,3) , (4,5) }.

Geben Sie an :

Adjazenzmatrix A(R)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Digraph von R^2



Adjazenzliste von R^{-1}

1	2
2	1, 3
3	3
4	1, 2
5	4

7 7

dom R = {1, 2, 3, 4} dom R^2 = {1, 2, 3}

cod R = {1, 2, 3, 4, 5} cod R^2 = {1, 2, 3, 4, 5}

(b) G sei eine Grundmenge, und p(x,y) sei ein Prädikat mit x, y ∈ G.

Es sei q : $\bigwedge_{x,y \in G} \left(p(x,y) \rightarrow \bigvee_{z \in G} (p(x,z) \rightarrow \neg p(z,y) \vee x=z) \right)$

Bestimmen Sie die Negation von q und formen Sie so um, dass Negationszeichen - falls überhaupt - nur noch vor dem Prädikat stehen. 4 4

$\neg \left(\bigwedge_{x,y \in G} \left(p(x,y) \rightarrow \bigvee_{z \in G} (p(x,z) \rightarrow \neg p(z,y) \vee x=z) \right) \right)$

$\Leftrightarrow \bigvee_{x,y \in G} \left(p(x,y) \wedge \bigwedge_{z \in G} (p(x,z) \wedge p(z,y) \wedge x \neq z) \right)$

(c) Es seien A = { { 1 } , { 1 , 3 } } , B = { 1 , 2 , { 1 , 3 } } und C = {∅}.

Geben Sie an: 7 4,5

(i) **P**(A) = {∅, {1}, {1,3}, {{1},{1,3}}} f

(ii) A ∩ **P**(B) = {{1,3}} f

(iii) **P**(A) ∩ **P**(B) = {∅, {1,3}} 0,5

(iv) A x C = {({1}, ∅), ({1,3}, ∅)}

(v) | A x B | = |A|·|B| = 6

(vi) | **P**(B) x **P**(A) | = |P(B)|·|P(A)| = 4·8 = 32

(vii) | **P**(**P**(**P**(C))) | = 16

$P(C) = 2^1 = 2$

$P(P(C)) = 2^2 = 4$

$P(P(P(C))) = 2^4 =$

2. Der Zugang zu einem Rechnernetz wird durch Passwörter geschützt. Ein Passwort darf aus 4, 5 oder 6 Zeichen bestehen. Als Zeichen sind zugelassen: die 7 kleinen Buchstaben a; b; c; d; e; f; g, die 6 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 sowie die 5 Sonderzeichen #, §, $, %, &.	
a. Wieviele Passwörter gibt es insgesamt? 36006768 ✓	2
b. Wieviele Passwörter enthalten nur Buchstaben? 136857 ✓	13 2
c. Wieviele Passwörter enthalten keine Ziffern? 3255552 ✓	2
d. Wieviele Passwörter enthalten genau zwei Sonderzeichen? ~~____~~	
e. Wieviele Passwörter enthalten mindestens ein Sonderzeichen? ~~____~~	

Begründungen sind unbedingt notwendig!

L4: □□□□

L5: □□□□□

L6: □□□□□□

a) 1 Passwörter der Länge 4: $(7+6+5)^4 = 104976$ (geordnet, mit Wdh)

2 Passwörter der Länge 5: 18^5

3 " " " 6: 18^6

Additionsregel: $18^4+18^5+18^6 = 36006768$ ✓

b) 1 Passwörter der Länge 4: 7^4 (7 Buchstaben zur Auswahl) (geordnet, mit Wdh)

2 Passwörter der Länge 5: 7^5

3 " " " 6: 7^6

Additionsregel: $7^4+7^5+7^6 = 136857$ ✓

c) 1. Passwörter der Länge 4: $(7+5)^4 = 12^4$ (7 Buchstaben und 5 Sonderzeichen zur Auswahl)

2. " " " 5: 12^5

3 " " " 6: 12^6

Additionsregel: $12^4+12^5+12^6 = 3255552$ ✓

d) 1 Auswahl 2 Sonderzeichen aus den 5: $\binom{5}{2} = 10$ Das wäre ungeordnet, ohne Wdh !

2 Auswahl der restlichen Stellen

a) Passwörter der Länge 4 (nur noch 2 Stellen zur Auswahl): $(7+6)^2$ Das wäre geordnet mit Wdh!

b) P. der Länge 5 (noch 3 Stellen übrig): $(13)^3$

c) P. " " 6 (" 4 " "): 13^4

$\boxed{2}$

3 Auswahl der Stelle von den 2 Sonderzeichen (geordnet, ohne Wdh) a) $P(2,4)$ b) $P(2,5)$ c) $P(2,6)$

weiteres zu Aufgabe $\boxed{2d}$

PW Länge 4: $10 \cdot 13^2 \cdot P(4,2) = 20280$

" " 5: $10 \cdot 13^3 \cdot P(5,2) = 1318200$

" " 6: $10 \cdot 13^4 \cdot P(6,2) = 102819600$

zu viele!

Ist auch falsch berechnet!

$P(6,2) = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 \neq P(6,4)!$

Sie haben bei Ihren Überlegungen übersehen, dass die 2 SO auch gleich sein können!

e)

Begründungen sind hier nicht notwendig!

3. Geben Sie für die unten stehenden Relationen R auf M an, ob die Eigenschaften reflexiv (r), irreflexiv (irr), symmetrisch (s), transitiv (t), intransitiv (int) bzw. antisymmetrisch (antis) zutreffen oder nicht. *Geben Sie bitte an: Kreuz für zutreffend, Strich für nicht-zutreffend.* *Bewertung: richtige Antwort: ½ Punkt; falsche Antwort: ½ Punkt Abzug* Zusatzaufgabe: Geben Sie für die Äquivalenzrelationen alle Äquivalenzklassen an.	15 12 ** 3

	M	$(x,y) \in R$	r	irr	s	t	int	antis	+	−
a.	$\mathbb{Z}$	$x\|y$	X	—	—	X	—	X f	5	1
b.	$\mathbb{N}$	$x = y$	X	—	X	X	—	— f	5	1
c.	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$xy > 0$	X	—	X	X	—	—	6	—
d.	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$xy < 0$	—	X	X	—	X	—	6	—
e.	$\mathbb{R}$	$xy \geq 0$	X	—	X	X f	—	—	5	1
									27	3

ÄR

ÄR

ÄRf

Das geht doch nicht! [x] ist eine Menge!

b) $\bigwedge_{x \in M} [x] = id_M$ (Für gleiche Paare) id_M ist eine Relation!

meinen Sie $[x] = \{x\}$???

c) Äquivalenzklassen sind zum einen die negativen Zahlen $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und die anderen sind die positiven Zahlen aus M, $\bigwedge_{\substack{x,y \in M \\ x,y > 0}} ([x] = [y])$ und $\bigwedge_{\substack{x,y \in M \\ x,y < 0}} ([x] = [y])$

e) Es gibt 3 Äquivalenzklassen, die der 0, der positiven Zahlen und die der negativen Zahlen aus M.

Das stimmt nicht!

$x \cdot 0 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

4. $(B; +, \cdot, \overline{}; 0, 1)$ sei eine Boolesche Algebra.
Auf B wird eine neue Verknüpfung $\square$ definiert: für $x, y \in B$ ist $x \square y := \overline{x \cdot y}$

a. Bestimmen Sie die unten angegebenen Ausdrücke.
Das Ergebnis soll so einfach wie möglich sein. Geben Sie an, welche Gesetze einer Booleschen Algebra Sie bei der Berechnung verwenden. 9 7,5

b. Bestimmen Sie alle $x, y \in B$ mit $x \square y = 0$. 2 1

c. Welcher Verknüpfung entspricht $\square$ in der Potenzmengenalgebra $(\boldsymbol{P}(M); \cup, \cap, \overline{}; \emptyset, M)$ für eine nichtleere Menge M?
Skizzieren Sie das Venn-Diagramm von $A \square B$ für $A, B \in \boldsymbol{P}(M)$. 3 3

d. Welcher Verknüpfung entspricht $\square$ in der Aussagenlogik? 2 1

$\Leftrightarrow$ Wir sind hier doch allgemein in einer BA! Da muss überall „=" stehen!

Zu a.:

i) $x \square x \underset{Def}{=} \overline{x \cdot x} \underset{T4}{\Leftrightarrow} \overline{x}$ ✓

ii) $x \square 1 \underset{Def}{=} \overline{x \cdot 1} \underset{T3}{\Leftrightarrow} \overline{x}$ ✓

iii) $x \square \overline{x} \underset{Def}{=} \overline{x \cdot \overline{x}} \underset{T1}{\Leftrightarrow} \overline{0} \underset{Kompl}{\Leftrightarrow} 1$ ✓

iv) $(x \square x) \square (y \square y) \underset{i, Def}{=} \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} \underset{T9}{\Leftrightarrow} x + y$ ✓

v) $(x \square y) \square (x \square y) \underset{Def}{=} \overline{\overline{(x \cdot y)} \cdot \overline{(x \cdot y)}} \underset{T9}{\Leftrightarrow} (xy) + (xy) \underset{T4}{\Leftrightarrow} xy$ ✓

vi) $(0 \square 0) \square 1 \underset{Def}{=} \overline{\overline{(0 \cdot 0)} \cdot 1} \underset{T2}{\Leftrightarrow} \overline{(\overline{0}) \cdot 1} \underset{T9}{\Leftrightarrow} 0 + \overline{1} \underset{Kompl}{\Leftrightarrow} 0 + 0 \underset{T3}{\Leftrightarrow} 0$ ✓

vii) $0 \square (0 \square 1) \underset{Def}{=} \overline{0 \cdot \overline{(0 \cdot 1)}} \underset{T2}{\Leftrightarrow} \overline{0 \cdot (\overline{0})} \underset{T9}{\Leftrightarrow} \overline{0} + 0 \underset{Kompl}{\Leftrightarrow} 1 + 0 \underset{T2}{\Leftrightarrow} 1$ ✓

Was können Sie aus i), iv) und v) schließen? $\square$ ist nicht distributiv * Siehe links!

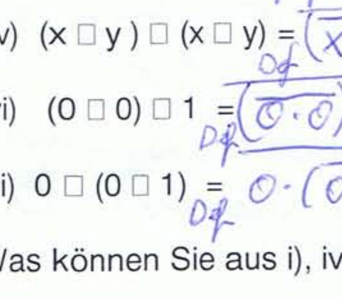
Was können Sie aus vi) und vii) schließen? $\square$ ist nicht assoziativ. ✓

zu b: Alle $x, y \in B$ mit $x \square y = 0$:

$\overline{x \cdot y} = 0 \underset{T9}{\Leftrightarrow} \overline{x} + \overline{y} = 0$

x, y müssen beide 1 sein Wieso?

Zu c.



Es entspricht dem Komplement ~~der Negation~~ der Schnittmenge $(\overline{A \cap B})$. ✓

Zu d. :

Die Ungleichheit: $\neq$ (NAND)

Das ist doch nicht dasselbe! $\neq$ ist eine Relation NAND eine Verknüpfung von Aus

5.	Es sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachtet wird die alternierende Summe $S(n)$ der quadrierten Zahlen von 1 bis n, also $S(n) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 -+\ldots\ldots+(-1)^{n+1} n^2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2$. Stellen Sie eine Formel für $S(n)$ auf und beweisen Sie sie mit Hilfe der vollständigen Induktion. *Tipp: Schauen Sie sich auch $2 \cdot S(n)$ an!*	10 10

n	$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2$	S(n)	2·S(n)
1	$1^2 = 1$	1	2
2	$1^2-2^2 = -3$	-3	-6
3	$1^2-2^2+3^2 = 6$	6	12
4	$1^2-2^2+3^2-4^2 = -10$	-10	-20
5	$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2 = 15$	15	30
6	" $-6^2 = -21$	-21	-42
7	" $+7^2 = 28$	28	56
8	" $-8^2 = -36$	-36	-72

Behauptung: $S(n) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2$

i) IAnfang: $S(1)$: LS: $\frac{1(1+1)}{2} \cdot (-1)^{1+1} = \underline{1}$

RS: $\sum_{i=1}^{1} (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^2 1^2 = \underline{1}$ } also gilt $S(1)$ ✓

ii) ISchritt: $k \in \mathbb{N}$ sei beliebig

a) IVor: $\frac{k(k+1)}{2} (-1)^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i^2$

b) IBeh: $\frac{(k+1)(k+2)}{2} (-1)^{k+2} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} i^2$

c) IBeweis:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i^2 + \cancel{(-1)^{k+1}} (-1)^{k+2} (k+1)^2$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \frac{k(k+1)}{2} (-1)^{k+1} + (k+1)^2 (-1)^{k+2} = \frac{k(k+1)}{2} (-1)^{k+1} + (k+1)^2 (-1)^{k+1} (-$$

$$= (-1)^{k+1} \left(\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2 (-1) \right) = (-1)^{k+1} \left(\frac{k(k+1) + 2(k+1)^2(-1)}{2} \right)$$

Weiteres zu Aufgabe 5

$$=(-1)^{k+1}\left(\frac{(k+1)\left(k+2(k+1)(-1)\right)}{2}\right)=(-1)^{k+1}\left(\frac{(k+1)\left(k+(2k+2)\cdot(-1)\right)}{2}\right)$$

$$=(-1)^{k+1}\left(\frac{(k+1)(-k-2)}{2}\right)=(-1)^{k+2}\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right) \checkmark$$

Damit: Aus i) und ii) ergibt sich $S(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$!

Prima gelöst!

$\circledast$ $S(n)$ ist eigentlich diese alternierende Summe! Ab sofort bei Ihnen: Prädikat.