Prof.Dr.Göbel	Mathematik 2 MD 2	WS 2006/07
	Prüfung A zum Abschluss des Semesters	

Name	Matr.-Nr.
Letzte Wiederholung der Prüfung gemäß RPO	O Ja ☒ Nein
Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln bearbeitet habe. Unterschrift :	

Verwenden Sie nur diese Blätter für Ihre Berechnungen und Lösungen.
Alle Ihre Schritte müssen begründet werden und nachvollziehbar sein!

Punkte			
	1. Aufgabe	12	8
	2. Aufgabe	12	10
	3. Aufgabe	18	11
	4. Aufgabe	16	6
	5. Aufgabe	8	8
	Gesamt	66	43

Maximal 60 Punkte werden gewertet. Bei mindestens 27 Punkten: bestanden!

Note	2,3 Göbel

Zuerst: **Genau lesen** | **Dann:** **Denken** | **Dann:** **Viel Erfolg!**

1. Gegeben sind die Grundmenge $G = \mathbb{N}(10) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ sowie die Mengen $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{3,6,9\}$ und $C = \{2,7,8\}$	
✓ a. Geben Sie die unten angegebenen Mengen D, E, F, H in der aufzählenden Form an.	4 4
✓ b. Skizzieren Sie in übersichtlicher Form das Hasse-Diagramm (Teilmengen-Diagramm) der Mengen A, B, C, D, E, F, G, H.	4 3
✓ c. Geben Sie **alle** Mengen $X \subseteq G$ an mit: $\lvert X\rvert \geq 3 \wedge (X \cap A = \emptyset) \wedge (X \cap B = \emptyset) \wedge (X \cap C \neq \emptyset)$	4 1

Zu a.: $G = \mathbb{N}(10)$, $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{3,6,9\}$ und $C = \{2,7,8\}$

$D = A \cap B = \{3,9\}$

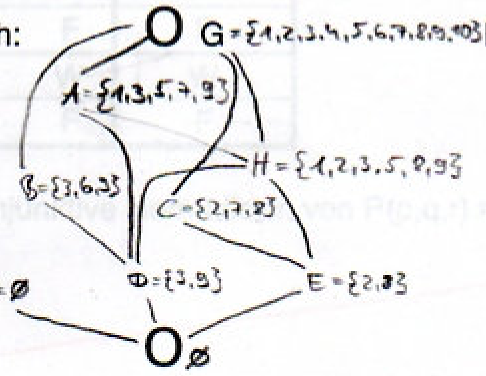
$E = C \setminus A = \{2,8\}$

$F = B \cap C = \{\emptyset$

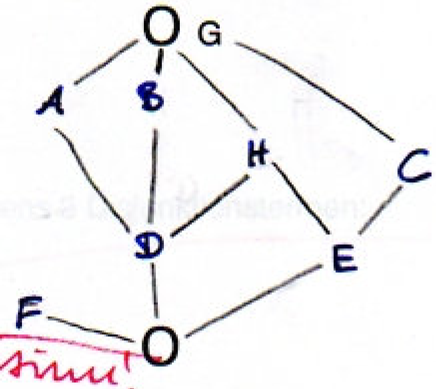
$H = A \Delta C = \{1,2,3,5,8,9\}$ ✓

Zu b.: Übersichtliches Hasse-Diagramm der Mengen A, B, C, D, E, F, G, H.:

1. Versuch:



Ergebnis:



Unsinn!

Zu c.: $(X \cap A) = \emptyset \Leftrightarrow X \cap \{1,3,5,7,9\} = \emptyset$

enthält nur: 2,4,6,8,10

$(X \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow X \cap \{3,6,9\} = \emptyset$

enthält nur: 1,2,4,5,7,8,10

$(X \cap C) = \emptyset \rightarrow X \cap \{2,7,8\} = \emptyset$

enthält nur: 1,3,4,5,6,9,10

Mögliche Elemente für X: 4, 10

≠ Nicht sorgfältig gelesen!

Da die gesuchte Menge X mindestens drei Elemente enthalten soll ($\lvert X\rvert \geq 3$), es aber nur zwei Elemente gibt, die in Frage kommen (4, 10), gibt es keine Menge X mit den gesuchten Eigenschaften!

Begründungen nicht vergessen!

2. Betrachtet werden die Aussagen P(p,q,r), deren Wahrheitstafel unten angegeben ist, und $Q(p,q,r) : \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg r \rightarrow r \wedge \neg q)$.	
✓ a. Geben Sie für P(p,q,r) einen semantisch äquivalenten Booleschen Term an.	2 2
b. Geben Sie für P(p,q,r) eine konjunktive Normalform an, in der höchstens 3 Disjunktionsterme enthalten sind.	2 0
✓ c. Bestimmen Sie die kanonische disjunktive Normalform von Q(p,q,r) mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie bei jedem Schritt an, welche semantisch äquivalente Umformung Sie anwenden.	6 6
✓d. In welcher Relation stehen die beiden Aussagen P(p,q,r) , Q(p,q,r)?	2 2

Wahrheitstafel von P(p,q,r)

Q(p,q,r)	p	q	r	P(p,q,r)
W	W	W	W	F
W	W	W	F	W
W	W	F	W	W
F	W	F	F	F
F	F	W	W	F
F	F	W	F	F
W	F	F	W	W
F	F	F	F	F

Zu a. Semantisch äquivalenter Boolescher Term für P(p,q,r)

$P(p,q,r) \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$ ✓

Wieso?

Zu b. Konjunktive Normalform von P(p,q,r) mit höchstens 3 Disjunktionstermen:

Zu c. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg r \rightarrow r \wedge \neg q)$..

$\underset{A11,T5}{\Leftrightarrow} (p \wedge q) \vee (\bar{p} \vee \bar{r} \rightarrow r \wedge \bar{q}) \underset{A11}{\Leftrightarrow} (p \wedge q) \vee (\overline{\bar{p} \vee \bar{r}}) \vee (r \wedge \bar{q}) \underset{T5,T15}{\Leftrightarrow} (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (r \wedge \bar{q})$

$\underset{T3,T11,T7}{\Leftrightarrow} (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee \cancel{(p \wedge q \wedge r)} \vee \cancel{(p \wedge \bar{q} \wedge r)} \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$

$\underset{T4}{\Leftrightarrow} (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$ ✓

d) $P \Rightarrow Q$ ✓

P impliziert semantisch Q!

Wieso? OK!

3. Kleinaufgaben.
Begründungen sind bei dieser Aufgabe nicht notwendig!

(1) $(B\,;+,\cdot,\overline{}\,;0,1)$ sei eine Boolesche Algebra mit $|B|\geq 4$.

	W	F	
Für alle $x\in B$ gibt es genau ein $y\in B$ mit $x+\overline{y}=1$ und $x\overline{y}=0$.	☐	☒	f
Für alle $x,y\in B$ gilt: wenn $x+y=0$ ist, dann ist $x=y=0$.	☒	☐	✓
Für alle $x,y\in B$ gilt: $x+y\neq xy$	☐	☒	✓
Für alle $x,y\in B$ gilt: wenn $x\cdot y=0$ ist, dann ist $y=\overline{x}$.	☐	☒	✓
Für alle $x,y,z\in B$ gilt: wenn $x+y=x+z$ ist, dann ist $y=z$.	☐	☒	✓
$(B\,;\cdot,+,\overline{}\,;1,0)$ ist eine Boolesche Algebra	☐	☒	f

Bitte ankreuzen: W für wahr, F für falsch.
Bewertung : Richtiges Kreuz : 1 Punkt. Falsches Kreuz : 1 Punkt Abzug

\+ 4 | − 2 | 4

(2) p(x,y) sei ein Prädikat mit $x, y\in G$. Betrachtet wird die Aussage

$$q:\ \neg\Big(\bigwedge_{y,z\in G}\big(p(z,y)\wedge p(y,z)\to \bigvee_{x\in G}(p(z,x)\vee p(x,z))\big)\Big).$$

a. Formen Sie q semantisch äquivalent um, so dass ein Negationszeichen – falls überhaupt - nur noch vor dem Prädikat steht. 3

$$\neg\Big(\bigwedge_{y,z\in G}\big(p(z,y)\wedge p(y,z)\to \bigvee_{x\in G}(p(z,x)\vee p(x,z))\big)\Big)$$

$\Leftrightarrow \bigvee_{y,z\in G}\overline{\big(p(z,y)\wedge p(y,z)\to \bigvee_{x\in G}(p(z,x)\vee p(x,z))\big)}$ f

$\Leftrightarrow \bigvee_{y,z\in G}\Big[\overline{\overline{(p(z,y)\wedge p(y,z))}\vee \bigvee_{x\in G}(p(z,x)\vee p(x,z))}\Big]$

$\Leftrightarrow \bigvee_{y,z\in G}\Big(p(z,y)\wedge p(y,z)\wedge \bigwedge_{x\in G}(\overline{p(z,x)}\wedge \overline{p(x,z)})\Big)$ ✓

3

b. Welchen Wahrheitswert hat q? ~~☐ W ☐ F ☐ hängt von p(x,y) ab~~ ±1

(3) Betrachtet werden alle 6-stelligen Zahlen, die nur die Ziffern 1 , 2 , 3 enthalten. 8

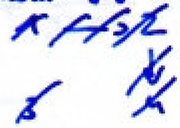
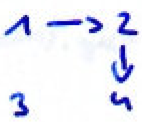
a. Wieviele solcher Zahlen gibt es?	$3^6=729$	✓
b. Wieviele solcher Zahlen beginnen nicht mit 1?	$2\cdot 3^5=486$	✓
c. Wieviele solcher Zahlen enthalten keine 3?	$2^6=64$	✓
d. Wieviele solcher Zahlen enthalten die Ziffer 1 genau einmal?	$3\cdot 2^5=96$	
e. Wieviele solcher Zahlen enthalten die Ziffer 2 genau zweimal?	$3^2\cdot 2^4=144$	

4

2!?

6!! 15!!

4. Es sei M = { 1 , 2 , 3 , 4 }. Überprüfen Sie, ob es Relationen $R \subseteq M \times M$ mit den unten angegebenen Eigenschaften gibt. Falls ja: Geben Sie den Digraphen eines Beispiels an. Falls nein: Geben Sie eine Begründung an.	16 6

		Beispiel bzw. Begründung
a.	R ist symmetrisch und $R \cup R^{-1}$ ist nicht symmetrisch	Nein: Wenn R symmetrisch ist, ist auch R^{-1} symmetrisch, da die Komponenten (x,y) nur vertauscht werden. $(x,y) \in R$, $(y,x) \in R^{-1}$ Da in R (x,y) als auch (y,x) liegen (wegen der Symmetrie), haben R und R^{-1} die selben Elemente und ihre Vereinigung ist auch symmetrisch. ✓
b.	R ist nicht symmetrisch und $R \cup R^{-1}$ ist symmetrisch	 ✓
c.	R ist transitiv und $R \cup R^{-1}$ ist nicht transitiv	Nein: Wenn R transitiv ist, ist R^{-1} auch transitiv. f Somit ist auch $R \cup R^{-1}$ transitiv. R:  R^{-1}:  $R \cup R^{-1}$:  ⇐ Gegenbeispiel Nein! Ein Beispiel dafür!
d.	R ist nicht transitiv und $R \cup R^{-1}$ ist transitiv	Nein: Gegenbeispiel siehe e). f  Wenn R nicht transitiv ist, ist R^{-1} auch nicht transitiv. $R \cup R^{-1}$ ist dann höchstens symmetrisch. $R \cup R^{-1}$ ist immer sym.
e.	R ist nicht transitiv und $R \cup R^{-1}$ ist nicht transitiv	 ✓
f.	R ist transitiv und $R \cup R^2$ ist nicht transitiv	
g.	R ist nicht transitiv und $R \cup R^2$ ist transitiv	
h.	R ist nicht transitiv und $R \cup R^2$ ist nicht transitiv	

5. Betrachtet wird für $n \in \mathbb{N}$ das Prädikat $A(n): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}$.

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. 8

8

Beweis: [redacted] [redacted]

IAnf.: $A(1)$: LS: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3}$

RS: $\frac{3^1 - 1}{2 \cdot 3^1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\Big\}$ LS = RS => A(1) gilt!

ISchr.: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

IVor.: $A(k)$: $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3^i} = \frac{3^k - 1}{2 \cdot 3^k}$

IBeh.: $A(k+1)$: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{3^i} = \frac{3^{k+1} - 1}{2 \cdot 3^{k+1}}$

IBew.: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{3^i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3^i} + \frac{1}{3^{k+1}} \underset{IVor}{=} \frac{3^k - 1}{2 \cdot 3^k} + \frac{1}{3^{k+1}}$

$= \frac{3(3^k - 1)}{3(2 \cdot 3^k)} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{3(3^k - 1)}{2 \cdot 3^{k+1}} + \frac{2}{2 \cdot 3^{k+1}}$

$= \frac{3^{k+1} - 1}{2 \cdot 3^{k+1}}$

Da $A(k)$ und $A(k+1)$, $A(k) \rightarrow A(k+1)$, gilt, gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

NR:

$\frac{3(3^{k}-1)}{3(2 \cdot 3^k)} + \frac{1}{3^{k+1}}$

$= \frac{3(3^{k}-1)}{2 \cdot 3^{k+1}} + \frac{2}{2 \cdot 3^{k+1}}$

$= \frac{3^{k+1} - 3 + 2}{2 \cdot 3^{k+1}}$