38 Punkte
2,3
RG

# TECHNISCHE FACHHOCHSCHULE BERLIN

## University of Applied Sciences

**Lehrveranstaltung: Mathematik II für Medieninformatiker, MDB2a, SS 2008**

Dipl. Phys. Rainer Gillert [redacted]

## Klausur zum 1. Prüfungstermin: 17.7.2008

**Name:** ______ **Vorname:** ______ ______
**Matrikel-Nr.:** ______

**1. Prüfungsversuch:** X **2. Prüfungsversuch:**___ **3.Prüfungsversuch:**___

**Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln ( Kopien der Folien aus der Vorlesung ) bearbeitet habe.**

**Unterschrift:**_ ______

---

**Aufgabe 1:**

Es seien A, B Elemente einer Potenzmenge P(E).

i. Weisen Sie die Gültigkeit der Beziehung $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ nach.
ii. Weisen Sie die Gültigkeit der Beziehung $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$ nach und veranschaulichen Sie den Sachverhalt mit Hilfe eines Venn-Diagrammes. (Erläuterung zum Venn-Diagramm!)
iii. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(A \cap B) \cap (A \backslash B)$ so weit wie möglich.

Verwenden Sie für Ihre Berechnungen ausschließlich die Gesetze der Mengenalgebra. Geben Sie zu jeder Umformung an, aufgrund welches Gesetzes Sie diese Umformung vornehmen. (14 Punkte)

**Aufgabe 2:** Es sei (B, +, *, -, 0, 1) eine Boolesche Algebra und $x, y, z \in B$.
**Hinweis:** Geben Sie bei Ihren Berechnungen stets die verwendeten Gesetze an!

i) Zeigen Sie, dass die Beziehungen $x\overline{y} = 0, \overline{x} + y = 1, xy = x$ untereinander äquivalent sind. Interpretieren Sie diesen Sachverhalt für eine Potenzmengenalgebra! Was erhalten Sie dann für x+y ?
ii) Beweisen Sie die nachstehende Aussage: $\bigwedge_{x,y,z \in B} \left( x\overline{y} + y\overline{z} + z\overline{x} = \overline{x}y + \overline{y}z + \overline{z}x \right)$
iii) Stellen Sie die „Binomischen Formeln" für $(x+y)*(x+y), \quad (x+\overline{y})*(\overline{x}+y), \quad (\overline{x}+\overline{y})*(x+y)$ in einer Booleschen Algebra auf. Mit anderen Worten: Vereinfachen Sie die vorstehenden Ausdrücke soweit wie möglich!
iv) Beweisen Sie die folgende „Kürzungsregel":

$$\bigwedge_{x,y,z \in B} ((x + z = y + z \wedge x + \bar{z} = y + \bar{z} \rightarrow x = y)$$

(16 Punkte)

**Aufgabe 3:**

i. Formulieren Sie eine Vermutung für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen und beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.

ii. Für beliebige reelle Zahlen $a, b$ mit $a \neq b$ beweisen Sie die Gültigkeit der nachstehenden Aussage durch vollständige Induktion.

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

iii. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $3^{2n} + 4^{n+1}$ ist stets durch 5 teilbar

(15 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Die Fermatschen Zahlen sind definiert durch: $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. Für n=0, 1, 2, 3, 4 erhält man also die Zahlen 3, 5, 17, 257, 65537.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $F_n = (\prod_{i=0}^{n-1} F_i) + 2$

(5 Punkte)

---

**Notenschlüssel:**

Es sind insgesamt 50 Punkte zu erreichen. Für eine Note von 4,0 sind mindestens 23 Punkte erforderlich. Halbe Punkte werden bei der Benotung der Einzelaufgaben vergeben. Die Gesamtzahl der Punkte wird auf die nächste volle Punktzahl nach oben gerundet.

| Punkte | Zensur |
|---|---|
| 49-50 | 1,0 |
| 46-48 | 1,3 |
| 43-45 | 1,7 |
| 40-42 | 2,0 |
| 37-39 | 2,3 |
| 34-36 | 2,7 |
| 31-33 | 3,0 |
| 28-30 | 3,3 |
| 25-27 | 3,7 |
| 23-24 | 4,0 |
| < 23 | 5,0 |

Ich wünsche Ihnen gutes Gelingen !

- Rainer Gillert –

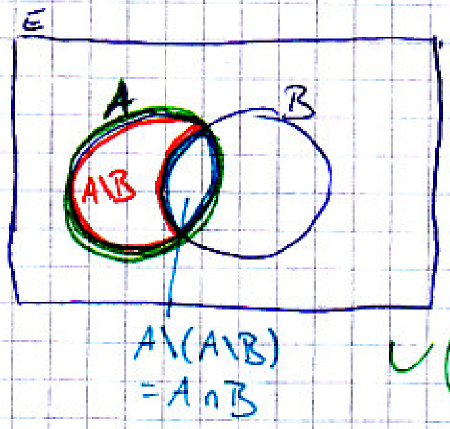
Mathe II-Klausur 17.7.08

## Aufgabe 1

ii) $A\cap B = A\setminus(A\setminus B) = A\cap(\overline{A\setminus B}) = A\cap(\overline{A\cap\overline{B}}) \overset{6}{=} A\cap(\overline{A}\cup B) \overset{5}{=} (A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)$

$= F + (A\cap B)$

$\overset{7}{=} A\cap B$ □




Von $A$ wird $A\setminus B$ "weggenommen".
Übrig bleibt $A\cap B$.

$A\setminus B$: Alles, was zu $A$ aber nicht zu $B$ gehört.

✓ 6 $A\cap B$: Alles, was zu $A$ und gleichzeitig zu $B$ gehört.

iii) $(A\cap B)\cap(A\setminus B) = (A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) \overset{2}{=} A\cap B\cap A\cap\overline{B} \overset{1}{=} A\cap A\cap B\cap\overline{B}$

$\overset{2}{=} (A\cap A)\cap(B\cap\overline{B}) \overset{3}{=} A\cap \cancel{F} \overset{7}{=} \cancel{F}$ $\emptyset$! 3,5

i) $A = (A\cap B)\cup(A\setminus B) = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = (A\cup A)\cap(A\cup\overline{B})\cap(B\cup A)\cap(B\cup\overline{B})$

$\overset{3,1}{=} A\cap(A\cup\overline{B})\cap(A\cup B)\cap W \overset{7}{=} A\cap(A\cup B) \overset{4}{=} A$ □ ✓ 4 Aufg 1: 13,5

F: $\emptyset$ W: E

1: Kommutativgesetz, 2: Assoziativgesetz, 3: Idempotenzgesetz, 4: Absorptionsgesetz, 5: Distributivgesetz, 6: De Morgan, 7: Neutrales Element

## Aufgabe 2

ii) $x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x}$

$\overset{7,1}{=} x\bar{y}(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})y\bar{z} + \bar{x}(y+\bar{y})z$

$\overset{5}{=} x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

$\bar{x}y + \bar{y}z + \bar{z}x$

$\overset{1,7}{=} \bar{x}y(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})\bar{y}z + x(y+\bar{y})\bar{z}$

$\overset{5}{=} \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$

$\overset{1}{=} x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

Da beide gleich sind, ist die Aussage wahr. □ ✓ 4

~~i) $(x+y)(x+y) \overset{5}{=} xx+xy+yx+yy \overset{1}{=} xx+xy+xy+yy \overset{3}{=} x+xy+y$~~

~~$(x+y)(\bar{x}+y) \overset{5}{=} x\bar{x}+xy+y\bar{x}+yy \overset{3}{=} xy+y\bar{x} = xy+\bar{x}y$~~

~~$(\bar{x}+\bar{y})(x+y) \overset{5}{=} \bar{x}x+\bar{x}y+\bar{y}x+\bar{y}y \overset{7}{=} \bar{x}y+\bar{y}x = \bar{x}y+x\bar{y}$~~

~~iv) $(x+z)(x+\bar{z}) = (y+z)(y+\bar{z})$~~

~~$\overset{5}{=} xx+x\bar{z}+zx+z\bar{z} = yy+y\bar{z}+zy+z\bar{z}$~~

~~$\overset{3,1,7}{=} x+x\bar{z}+xz = y+y\bar{z}+yz$~~

~~$\overset{4}{=} x = y$ □~~

## Aufgabe 3

i) $\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$

| n | 2i-1 | $\sum$ 2i-1 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 5 | 9 |
| 4 | 7 | 16 |
| 5 | 9 | 25 |

Induktionsanfang: für $n=1$:

$\sum_{i=1}^{1} 2i-1 = 2-1 = 1 = 1^2$ ✓

Induktionsschritt:

Induktions~~voraussetzung~~: $\Rightarrow$ Induktionsbehauptung

$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 = (n+1)^2$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 = \sum_{i=1}^{n} 2i-1 + 2(n+1)-1 = n^2 + 2n+2-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2 \ \square$$

5

ii) $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

Induktionsanfang: für $k=0$: $\sum_{k=0}^{0} a^0 b^0 = 1 = \frac{a^1-b^1}{a-b} = 1$ ✓

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $\Rightarrow$ Induktionsbehauptung

$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^{k} = \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b}$

Beweis: $\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^{k} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k} + a^{n+1-n+1} b^{n+1}$

$$= \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} + b^{n+1} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}+(a-b)b^{n+1}}{a-b} = \frac{a^{n+1}+ab^{n+1}-b^{n+2}-b^{n+1}}{a-b}$$

$$= \frac{a^{n+1}+ab^{n+1}-b}{a-b} = \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b} \ \square$$

5

Mathe II - Klausur 17.07.08

## Aufgabe 3

iii) $3^{2n} + 4^{n+1}$ ist stets durch 5 teilbar

Induktionsanfang: für $n=0$: $3^0 + 4^1 = 5$ ✓

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung $\qquad$ Induktionsbehauptung

$3^{2n} + 4^{n+1}$ ist durch 5 teilbar $\Rightarrow$ $3^{2(n+1)} + 4^{n+2}$ ist durch 5 teilbar

Beweis: $3^{2n+2} + 4^{n+2} = 9 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 4^{n+1}$

$= 4(\underbrace{3^{2n} + 4^{n+1}}_{\text{Induktionsvoraussetzung}}) + 5 \cdot 3^{2n}$

Da in der Menge der natürlichen Zahlen:
Vielfache einer durch 5 teilbaren Zahl sind immernoch durch 5 teilbar.
$4 \cdot 3^{2n} + 4^{n+1}$ ist durch 5 teilbar.
$5 \cdot 3^{2n}$ ist ebenfalls durch 5 teilbar.
Also ist deren Summe auch durch 5 teilbar. □ ✓ 1,5

Aufg 3: 1,5

## Aufgabe 4

$F_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) + 2$

Induktionsanfang: für $n=1$: $F_1 = \prod_0 F_0 + 2 = \cancel{1}^{\,3} + 2 = 3^{\,>5}$ ✓ 0,5

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ Induktionsbehauptung

$F_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) + 2 \Rightarrow F_{n+1} = \left(\prod_{i=0}^{n} F_i\right) + 2 = 2^{2^{n+1}} + 1 = 4 \cdot 2^{2^n} + 1$ ✓ 1

$= 2^{2^n} + 1$

Beweis: $F_{n+1} = \left(\prod_{i=0}^{n} F_i\right) + 2 = \left(\left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) + 2\right) F_n + 2$ ?! 1

$= \left[\left(2^{2^n}\right)^2 + 2\right] 2^{2^n} + 2 =$

Aufg 4: 2,5

Aufgabe 2

i) $xy = x \Rightarrow x\bar{y} = 0$

$x\bar{y} = (xy)\bar{y} \overset{2}{=} x(y\bar{y}) \overset{7}{=} x \cdot 0 = 0$ □ (✓)

$x\bar{y} = 0 \Rightarrow xy = x$

$xy = xy + 0 = xy + x\bar{y} \overset{5}{=} x(y+\bar{y}) \overset{7}{=} x \cdot 1 = x$ □ (✓)

$\bar{x} + y = 1 \Rightarrow xy = x$

$xy(\bar{x}+y) \overset{5,1}{=} x\bar{x}y + xyy \overset{3}{=} x\bar{x}y + xy \overset{2}{=} (x\bar{x})y + xy \overset{7}{=} 0 \cdot y + x \cdot y = xy$ ...

$xy = x \Rightarrow \bar{x} + y = 1$

(✓)

$\overline{xy} + y \overset{6}{=} \bar{x} + \bar{y} + y \overset{2}{=} \bar{x} + (\bar{y} + y) \overset{7}{=} x + 1 = 1$ □

$\bar{x} + y = 1 \Rightarrow x\bar{y} = 0$

$x\bar{y}(\bar{x}+y) \overset{5}{=} x\bar{x}\bar{y} + x\bar{x}y \overset{2}{=} (x\bar{x})\bar{y} + (x\bar{x})y \overset{7}{=} \bar{y} \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$ □

$x\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} + y = 1$

$\bar{x} + y + x\bar{y} =$ (✓) 3 Aufg 2: 7

iv)

$x =$

Ergebnis

| Aufg. | Punkte |
|---|---|
| 1 | 13,5 |
| 2 | 7 |
| 3 | 15 |
| 4 | 2,5 |
| Σ | 38 → 2,3 |

RG