

Mathematik II: 11. Übungsblatt

Medieninformatik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Marzena Fügenschuh



BEUTH HOCHSCHULE
FÜR TECHNIK
BERLIN
University of Applied Sciences

Wiederholung

Ausgabe: 5. Juli 2016

1. Übung:

1.1. Das lateinische Alphabet hat 26 Buchstaben davon 5 Vokale. Wir bilden 7-buchstabile Wörter mit drei Vokalen und vier Konsonanten. Die Buchstaben dürfen sich wiederholen. In wie vielen der Wörter sind die Vokale durch Konsonanten getrennt?

$\frac{5!}{3!} \cdot \frac{21!}{4!}$ $\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{4}$ $5^3 \cdot 21^4$ $\binom{26}{3} \cdot \binom{21}{4}$.

1.2. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bilden **keine** Basis in \mathbb{R}^3 , weil

- sie nicht orthogonal zueinander sind.
- sie linear abhängig sind.
- es keine Einheitsvektoren sind.
- einer der Vektoren keine Komponente gleich 0 hat.

1.3. Die Geraden

$$g(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$

- stimmen überein.
- verlaufen parallel zueinander.
- stehen senkrecht zueinander.
- haben genau einen Schnittpunkt.

1.4. Die Inverse zur Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist die Matrix

$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5. Für welchen Wert von a ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 8 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ singulär ($\det A = 0$)?

- für alle $a \in \mathbb{R}$ $a = 1$ $a = 0$ $a = -2$.



1.6. Welche der Transformationen von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^3 ist nicht injektiv:

- die Spiegelung an der xy -Ebene
- die Orthogonalprojektion auf die yz -Ebene
- die Streckung mit Skalar $k = 2$
- die Drehung um den Winkel $\varphi = 90^\circ$.

1.7. Für die Folge $a_n = \frac{(-2)^n + 2^n}{2n}$ gilt:

- $a_4 = 0$
- $a_4 = 8$
- $a_4 = 16$
- $a_4 = 4$.

1.8. Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2 + 3n - 1}{2(n-2)^2}\right)$ beträgt:

- 1
- 0
- $\frac{1}{2}$
- $-\infty$.

1.9. Die Folge $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, ist

- monoton fallend, beschränkt und konvergent.
- monoton wachsend, beschränkt und konvergent.
- monoton wachsend, beschränkt aber nicht konvergent.
- monoton wachsend, nicht beschränkt aber konvergent.

1.10. Wie viele der folgenden Funktionen sind stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{falls } x \neq 1 \\ 2, & \text{falls } x = 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x \geq 1 \\ x+1, & \text{falls } x < 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1}, & \text{falls } x \neq -1 \\ 2, & \text{falls } x = -1 \end{cases}$$

- keine
- eine
- zwei
- drei.

2. Übung:

Gegeben seien Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- 2.1. Zeigen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.
- 2.2. Zeigen Sie, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.
- 2.3. Bilden die Vektoren eine orthonormale Basis? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.4. Stellen Sie den Vektor $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} .



3. Übung:

Gegeben sei die Folge $-19, -8, 3, 14, 25 \dots$

3.1. Geben Sie die explizite Definition dieser Folge an.

3.2. Geben Sie die rekursive Definition dieser Folge an.

3.3. Die Summenformel für die ersten $n + 1$ Elemente dieser Folge lautet:

$$\sum_{k=0}^n (11k - 19) = \frac{11n^2 - 27n - 38}{2}$$

Zeigen Sie die Richtigkeit der Summenformel mit der vollständigen Induktion.

4. Übung:

4.1. Geben Sie die Transformationsmatrix der Transformation $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, die der Spiegelung an der xy -Ebene in \mathbb{R}^3 entspricht.

4.2. Geben Sie die Transformationsmatrix der Transformation $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, die der Orthogonalprojektion auf die yz -Ebene in \mathbb{R}^3 entspricht.

4.3. Gilt $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$? Begründen Sie Ihre Antwort!

4.4. Bestimmen Sie das Bild des Punktes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ unter $T_1 \circ T_2$.

5. Übung:

Eine Ebene wird von den drei Punkten gestützt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Geben Sie die Parametergleichung der Ebene an.

2. Bestimmen Sie die Normalengleichung der Ebene.

3. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ zur Ebene.

6. Übung:

6.1. Geben Sie den Gültigkeitsbereich an und lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + x - 6} = 2x - 6.$$



6.2. Geben Sie den Gültigkeitsbereich an und Lösen Sie die Ungleichung

$$\frac{3x + 1}{2 - x} \geq 2.$$

6.3. Lösen Sie die Gleichung

$$|3x + 1| = 2 \cdot |2 - x|$$

7. Übung:

Gegeben seien Funktionen

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = -x^3.$$

Skizzieren Sie den Graphen der Komposition $f \circ g(x)$ und ihrer Inversen.

8. Übung:

8.1. Bestimmen Sie die Nullstellen von

$$f(x) = 4 \cos^2 \left(\frac{x + \pi}{2} \right) - 3.$$

Nutzen Sie die Abb. 1.

8.2. Bestimmen Sie die Periode von der Funktion

$$f(x) = \cos \left(\frac{x + \pi}{2} \right).$$

8.3. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 3.$$

Gehen Sie dabei von der Kurve $\cos(x)$ aus und transformieren Sie entsprechend. Listen Sie die Schritte auf.

9. Übung:

Gegeben seien Funktionen:

$$p(x) = 6x^4 - 24x^3 + 18x^2 + 24x - 24$$

$$q(x) = 2(x + 3)(x - 2)(x + 1)$$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

9.1. Bringen Sie $q(x)$ in die Summendarstellung.

9.2. Zeigen Sie mittels Horner-Schema, dass die Werte $\{-1, 2, 1\}$ die Nullstellen von $p(x)$ sind und bringen $p(x)$ in die Produktdarstellung.



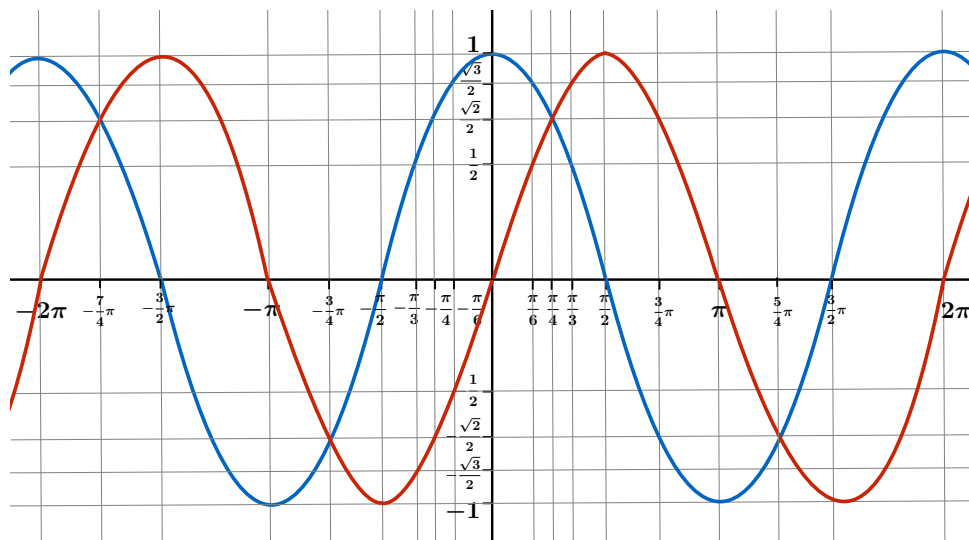


Abbildung 1: Sinus- und Kosinuskurve.

- 9.3. Bestimmen Sie den ganzen Anteil und das Restpolynom von $f(x)$. Skizzieren Sie den ganzen Anteil von $f(x)$.
- 9.4. Geben Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen von f an. Unterscheiden Sie bei den Definitionslücken zwischen Polstellen und hebbaren Singularitäten.
- 9.5. Berechnen Sie die Grenzwerte an den Definitionslücken.
- 9.6. Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

- 9.7. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f .