Technische Fachhochschule Berlin

Lehrveranstaltung: Mathematik I für Medieninformatiker, MD-B1, SS 2008

Dr. Ulf Rothkirch

Klausur zum 1. Prüfungstermin: 12.07.2008

Name: [redacted]

1. Prüfungsversuch: X 2. Prüfungsversuch:___ 3. Prüfungsversuch:___

Zugelassene Hilfsmittel:
- Tafelwerk der Sekundarstufen I und II
- Zusammenfassung im Umfang von 3 A4-Seiten, davon eine Seite zum Thema „Logik/Mengenlehre", eine Seite zum Thema „Lineare Algebra" und eine Seite zum Thema „Elemente der Analysis"
- vom Dozenten erstellte und über Moodle verbreitete Zusammenfassungen zu einigen Themen

Punktverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Erreichte Punktzahl	9	8	5,5	5	5	7	7	12	59
Erreichbare Punktzahl	16	14	9	5	8	8	8	12	80

2,3 Roth

Notenschlüssel:

Punkte	78-80	73-77	68-72	63-67	58-62	53-57	48-52	43-47	38-42	36-37	< 36
Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5,0

Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln bearbeitet habe.

Unterschrift: [redacted]

Klausuraufgaben

1. Gegeben sind die Punkte A(0; 0; 0), B(1; 2; 3) und C(1; 1; − 1). Es seien $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren der Punkte B bzw. C.

   a) Entscheiden Sie, ob die Menge { $\vec{b}$, $\vec{c}$ } linear abhängig oder linear unabhängig ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

   b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

   c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v}$, der sowohl auf $\vec{b}$ als auch auf $\vec{c}$ senkrecht steht.

   d) Es sei $\vec{m}$ der Ortsvektor des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{BC}$. Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{m}$.

   e) Bestimmen Sie die Abstände von M von den Punkten A, B und C.

   f) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes X, sodass ABXC ein Parallelogramm bildet.

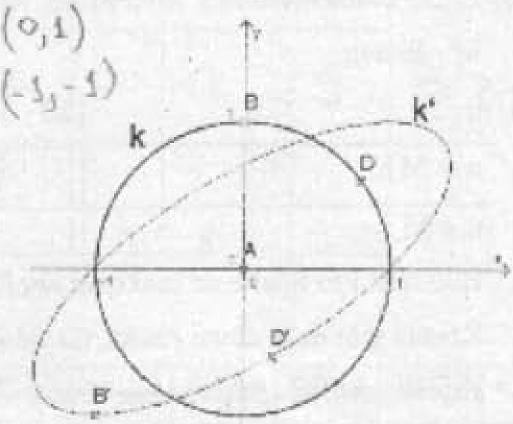
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\log_4(x^3 - 1) - \log_4(x - 1) = \log_2 \sqrt{3,5x}\,.$$

Der Grundbereich der Variablen x ist die Menge der reellen Zahlen.

3. Die Figur k' geht aus dem Kreis k durch eine lineare Abbildung f hervor. Insbesondere ist B' der Bildpunkt von B und D'(0,2| − 0,6) der Bildpunkt von D(0,8| 0,6).

B (0,1)
B' (-1,-1)



   a) Bestimmen Sie die Matrix von f.

   b) Die Ortsvektoren aller zu k gehörenden Punkte lassen sich durch die Menge $\{\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} : 0 \le t < 2\pi\}$ beschreiben. Geben Sie für die Menge der Ortsvektoren der zu k' gehörenden Punkte ebenfalls eine passende Mengendarstellung mittels einer charakterisierenden Eigenschaft an.

4. Es sei $A = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5\sqrt{3} \\ -0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{pmatrix}$ ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

5. a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \dfrac{x^4 - 9}{x^2 + 2x - 3}$ alle Nullstellen, alle Definitionslücken und die Asymptote.

b) Entscheiden Sie zu jeder Definitionslücke, welcher Art einer Definitionslücke diese zuzuordnen ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

6. a) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 1 - x$ und $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Geben Sie die Gleichungen der Funktionen $u(x) = f \circ g\,(x)$ und $v(x) = g \circ f\,(x)$ an. Vereinfachen Sie die Gleichungen für u und v so weit wie möglich.

Hinweis: Es genügt, u und v als gebrochenrationale Funktionen darzustellen.

b) Geben Sie auch die Gleichung der Funktion $z(x) = g \circ g\,(x)$ an und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. Auch hier gilt der Hinweis aus Aufgabe a).

c) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion z.

7. Es sei $M = \left\{ n \in \mathbb{N} : n \leq 20 \wedge \bigwedge_{u \in \mathbb{N}} \left(\bigvee_{v \in \mathbb{N}} \left(u \cdot v = n \rightarrow \left(u = 1 \vee u = n \vee u \in P \right) \right) \right) \right\}$ und P die Menge aller Primzahlen.

a) Entscheiden Sie durch Ankreuzen, welche der vorgegebenen natürlichen Zahlen zu M gehören.

n	20	10	5	1
$n \in M$		X ✓	X ✓	X ✓
$n \notin M$	X			

Hinweis: Pro Spalte ist maximal ein Kreuz zu setzen. Für richtig eingetragene Kreuze gibt es je einen Punkt, für falsch eingetragene Kreuze wird jeweils ein Punkt abgezogen. Jede Spalte ohne Kreuz wird mit null Punkten bewertet.

b) Geben Sie M durch Aufzählung der Elemente an.

Hinweis: Falls Aufgabe b) richtig gelöst ist, gibt es die volle Punktzahl für die Gesamtaufgabe auch ohne die Bearbeitung von a).

8. a) Es sei $H_1 = p \rightarrow (q \vee r)$ und $H_2 = (\overline{p} \vee q \vee r)(p \vee \overline{q} \vee \overline{r})$. Entscheiden Sie, welche der Beziehungen $H_1 \equiv H_2$, $H_1 \Rightarrow H_2$ bzw. $H_2 \Rightarrow H_1$ richtig sind.

b) Formen Sie H_1 in eine semantisch äquivalente KKNF um.

c) Geben Sie die Anzahl der Elementarkonjunktionen der KDNF von H_1 an.

(1) b) $\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1+2-3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}}$

$= \frac{0}{\sqrt{42}} = 0$

$\cos\alpha = 0$

$\alpha = 90^\circ$ ✓

(1) c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \vec{0}$

$a + 2b + 3c = 0$

$a + b - c = 0$

$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \vec{0}$

a	b	c	
1	2	3	0
1	1	-1	0
1	2	3	0
0	1	4	0

$III = I - III$

$b + 4c = 0$

$b = -4c$

$a + 2b + 3c = 0$

$a - 8c + 3c = 0$

$a - 5c = 0$

$a = 5c$

$\begin{pmatrix}5c\\-4c\\c\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$ ✓

(5-) a) Nullstellen

$x^4 = 9$

$x = \sqrt[4]{9}$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$ ✓

Definitionslücken

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

$x = -3 \quad x = 1$ ✓

Asymptote fehlt

-2

[redacted]

[redacted] [redacted]

(4) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5\sqrt{3} \\ 0{,}5\sqrt{3} & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5\sqrt{3} \\ -0{,}5\sqrt{3} & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Entscheidung positiv weil wenn man $A \cdot A^{-1}$ rechnet ist, das Ergebnis die Einheitsmatrix ✓

5/5

(2) $\log_4 (x^3-1) - \log_4 (x-1) = \log_2 \sqrt{3{,}5x}$

$\log_4 \frac{(x^3-1)}{x-1} = \frac{\log_4 \sqrt{3{,}5x}}{\log_4 2}$ ✓

$\log_4 \frac{(x^3-1)}{x-1} = \frac{\log_4 \sqrt{3{,}5x}}{\log_4 \sqrt{4}}$

$\log_4 \frac{(x^3-1)}{x-1} = \frac{\log_4 \sqrt{3{,}5x}}{\frac{1}{2} \log_4 4}$

$\log_4 \frac{(x^3-1)}{x-1} = \frac{\log_4 \sqrt{3{,}5x}}{\frac{1}{2}}$ ✓

$\log_4 \frac{(x^3-1)}{x-1} = 2 \log_4 \sqrt{3{,}5x}$

$\log_4 \frac{(x^3-1)}{x-1} = \log_4 3{,}5x$ ✓

$\frac{(x^3-1)}{x-1} = 3{,}5x \quad | \cdot (x-1)$ ✓ Bis hier her

8/14

$(x^3-1)\cancel{(x-1)} = 3{,}5x(x-1) \rightarrow (x^3-1)(x-1) - 3{,}5x(x-1) = 0$

$(x-1)\left((x^3-1)-(3{,}5x)\right) = 0$

$x-1=0 \qquad x^3-1-3{,}5x=0$

$x=1$ Rest nicht brauchbar.

8 b) $p \to (q \vee r)$

$\bar{p} \vee (q \vee r)$

$\bar{p} \vee q \vee r$

$\bar{p}(q \vee \bar{q}) \vee q(p \vee \bar{p}) \vee r(p \vee \bar{p})$

$\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee pq \vee \cancel{\bar{p}q} \vee pr \vee \bar{p}r$

$\bar{p}q(r \vee \bar{r}) \vee \bar{p}\bar{q}(r \vee \bar{r}) \vee pq(r \vee \bar{r}) \vee pr(q \vee \bar{q}) \vee \bar{p}r(q \vee \bar{q})$

$\bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee pq\bar{r} \vee \cancel{pqr} \vee p\bar{q}r \vee \cancel{\bar{p}qr} \vee \cancel{\bar{p}\bar{q}}r$

$\bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r$ KDNF

$p\bar{q}\bar{r}$

$\boxed{\bar{p} \vee q \vee r \quad \text{KKNF}}$ ✓

c) 7 Elementar Konjunktionen ✓

6 a) $u(x) = 1 - \frac{x-1}{x}$ ✓ $\quad v(x) = \frac{1-x-1}{1-x}$

$u(x) = \frac{x-(x-1)}{x} \quad v(x) = \frac{-x}{1-x}$ ✓

$u(x) = \frac{-1}{x}$ (✓)

−1

6 b) $z(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}}$ ✓ $= \frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{-x}{x(x-1)}$ ✓

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1\}$ ✓

7/8

1a) Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig ✓, weil man die nicht als eine lineare Kombination darstellen kann.

unverständliche Formulierung

−2

[redacted]

3 a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $b = -1$ ✓ $\quad$ $d = -1$ ✓

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,6 \end{pmatrix}$

$0,8a + 0,6b = 0,2$ $\quad$ $0,8a - 0,6 = 0,2$

$0,8c + 0,6d = -0,6$ $\quad$ $0,8a = 0,2 + 0,6$

$0,8c - 0,6 = -0,6$ $\quad$ $a = \frac{0,8}{0,8}$

$0,8c = 0$ $\quad$ $a = 1$ ✓

$c = 0$ ✓

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ falsch ausgefüllt $-0,5$

b) fehlt -3 $\quad$ 5,5/9

7 b) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19\}$

Klammerstruktur falsch analysiert! $\quad$ -1 $\quad$ 7/8

5b) Sind keine hebbare definitionslücken weil im Zähler kein Linearfaktor gibt der $(x+3)$ oder $(x-1)$ ist ✓

Vorzeichenwechsel? $\quad$ -1

[redacted]

8a)

p	→	(q	∨	r)	$\bar{p}$	∨	q	∨	r	∧	p	∨	$\bar{q}$	∨	$\bar{r}$
w	w	w	w	w	F	w	w	w	w	w	w	w	F	w	F
w	w	w	w	F	F	w	w	w	F	w	w	w	F	w	w
w	w	F	w	w	F	F	F	w	w	w	w	w	w	w	F
w	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	w	w	w	w	w
F	w	w	w	w	w	w	w	w	w	F	F	F	F	F	F
F	w	w	w	F	w	w	w	w	F	w	F	F	F	w	w
F	w	F	w	w	w	w	F	w	w	w	F	w	w	w	F
F	w	F	F	F	w	w	F	w	F	w	F	w	w	w	w
	↑ 2		1			1		2		↑ 3		1		2	

Die richtige Beziehung ist $H_2 \Rightarrow H_1$ ✓

12/12

1f) $\vec{x} = \vec{B} - \vec{C}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Dann ergibt sich das Parallelogramm ABCX (falsche Punktreihenfolge). −1

1d) $\vec{CB} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} : 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ f

−2

9/16

e) fehlt −2

[redacted]