Klausuraufgaben

1. Gegeben ist eine Tabelle mit dem folgenden Wahrheitswertverlauf: ~~max~~ 7P

p	q	r	H
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	W
W	F	F	W
F	W	W	F
F	W	F	W
F	F	W	W
F	F	F	W

a) Konstruieren Sie einen Ausdruck H der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik, der den in der Tabelle dargestellten Wahrheitswertverlauf besitzt!

b) Formen Sie H in eine semantisch äquivalente disjunktive Normalform (DNF) aus vier Fundamentalkonjunktionen um!

2. Gegeben ist der folgende Ausdruck H der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik:

max 11P $p \to (q \to r)$

a) Formen Sie den Ausdruck H zu einer semantisch äquivalenten disjunktiven Normalform (DNF) um!

b) Formen Sie den Ausdruck H in die semantisch äquivalente kanonische disjunktive Normalform (KDNF) um!

3. Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente oder durch eine

max 5P möglichst einfache verbale Beschreibung an!

a) $M_1 = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \le 20 \wedge \bigvee_{k \in \mathbb{N}_0} (3k = n)\}$

b) $M_2 = \{10n + k : n \in \{0, 1, 2, 3\} \wedge k \in \mathbb{N}_0 \wedge k < 10\}$

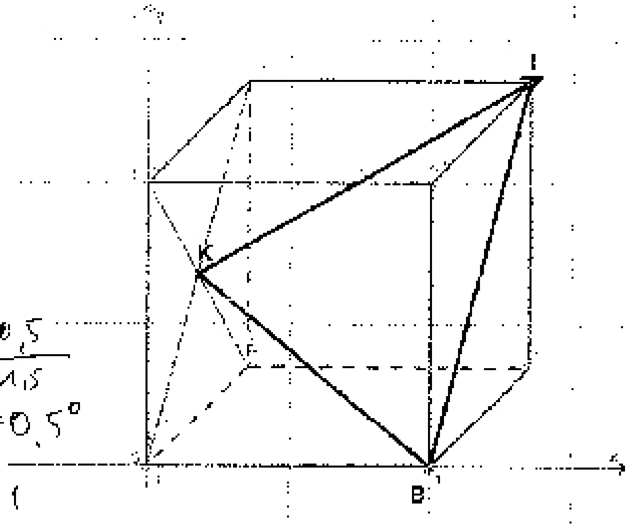
4. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

max 7P

(I)	x	+ y	+ z	= 2
(II)	3x	+ 2y	+ z	= 2
(III)	2x	+ 3y	+ 4z	= 3

max 8 P

5. Berechnen Sie im nebenstehenden Dreieck KBI die Größen aller Innenwinkel!
Hinweis: Das Dreieck KBI ist eingeschlossen in einen Würfel mit der Kantenlänge von 1 LE.



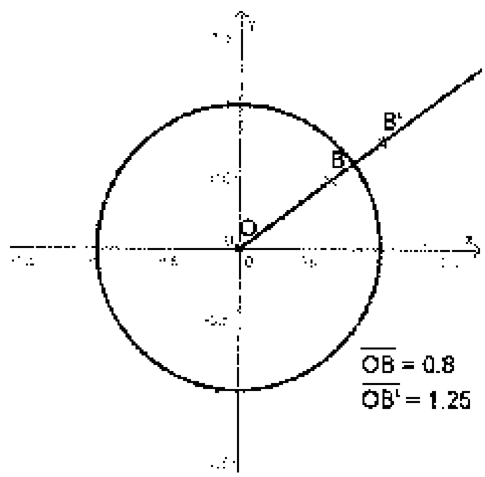
Nachtrag: $\sphericalangle\ \overrightarrow{KB}\ \overrightarrow{KI}$ $\cos\alpha = \frac{0,5}{1,5}$ $\alpha = 70,5°$

$\sphericalangle\ \overrightarrow{BK}\ \overrightarrow{BI}$ $\cos\beta\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\beta = 54,7°$

Winkelsumme 180° !

max 4 P

6. Eine Abbildung sei wie folgt konstruiert:
Der Koordinatenursprung O wird auf sich selbst abgebildet.
Liegt ein Punkt B außerhalb des Koordinatenursprungs, so liegt der Bildpunkt B' auf der Halbgeraden durch O und B. Die Länge der Strecke $\overline{OB'}$ ist der Kehrwert der Länge der Strecke $\overline{OB}$ (siehe Beispiel).
Handelt es sich bei der Abbildung um eine lineare Abbildung?
Begründen Sie Ihre Entscheidung!



max 9 P

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x + \sqrt{x+6} - 2,75 = 0$!

max 9 P

8. Ermitteln Sie für die irrationale Zahl $\sqrt{20}$ einen *endlichen* Kettenbruch als rationalen Näherungswert, dessen absolute Abweichung von $\sqrt{20}$ maximal 0,01 beträgt!

1/2

(1.) a) $H = pqr \vee p\bar{q}r \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ ✓

b) Ich fasse die ersten beiden Fundamentalkonjunktionen zusammen. Ich füge zwei Fundamentalkonjunktionen hinzu ($2\times\ \bar{p}\bar{q}\bar{r}$). Dann erhalte ich:

$$H \equiv (pqr \vee pq\bar{r}) \vee (p\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}r) \vee (\bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}) \vee (\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r})$$

Die hinzugefügte Fundamentalkonjunktion war bereits im Ausdruck enthalten. Die Klammern sind nicht notwendig, veranschaulichen meine Gruppierungen:

$$H \equiv pr(q \vee \bar{q}) \vee \bar{q}r(p \vee \bar{p}) \vee \bar{p}\bar{r}(q \vee q) \vee \bar{p}\bar{q}(r \vee \bar{r})$$
$$\equiv pr \vee \bar{q}r \vee \bar{p}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}$$ ✓

7/7

(2.) a) $H \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \bar{p} \vee (q \rightarrow r) \equiv \bar{p} \vee (\bar{q} \vee r) \equiv \bar{p} \vee \bar{q} \vee r$

Disjunktion ~~ist~~ assoziativ, deswegen keine Klammern. ✓

b) $H \equiv \bar{p}(q \vee \bar{q})(r \vee \bar{r}) \vee \bar{q}(p \vee \bar{p})(r \vee \bar{r}) \vee r(p \vee \bar{p})(q \vee \bar{q})$

$\equiv \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \cancel{\bar{p}\bar{q}r} \vee \cancel{\bar{p}\bar{q}\bar{r}} \vee \cancel{p\bar{q}r} \vee \cancel{\bar{p}qr} \vee pqr \vee p\bar{q}r$

$\equiv \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee pqr$ ✓

11/14

(3.) a) $M_1 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ ✓

– alle $n \leq 20$, die teilbar durch 3 sind

b) Die Menge der natürlichen Zahlen (mit 0: $\mathbb{N}_0$) von 0 bis 39 wird von M_2 beschrieben. ✓ 5/5

→

(4)

	x	y	z	b	
I	1	1	1	2	
II	3	2	1	2	II := II − 3I
III	2	3	4	3	III := III − 2I

~~I~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~2~~
~~II~~	~~3~~	~~2~~	~~1~~	~~2~~
~~III~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~2~~

I	1	1	1	2	
II	0	−1	−2	−4	
III	0	1	2	−1	III := III + II

I	1	1	1	2	
II	0	−1	−2	−4	
III	0	0	0	−5	0 = −5 f. Aussage ✓

Es gibt keine Lösung für dieses LGS, die Lösungsmenge ist leer. ✓

2/2

(5) nehme die Strecken $\overline{KB}$ und $\overline{KI}$ als Vektoren $\overrightarrow{KB}$ und $\overrightarrow{KI}$ und berechne den eingeschlossenen Winkel:

$\overrightarrow{KI} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ NR siehe Schmierblatt

Formel zur Winkelberechnung:

$$\cos\gamma = \frac{\langle \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KB} \rangle}{|\overrightarrow{KI}| \cdot |\overrightarrow{KB}|} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}5} \cdot \sqrt{1{,}5}} = \frac{0{,}5}{1{,}5}$$

$$\gamma \approx \underline{70{,}53°}$$

Dann Vektoren $\overrightarrow{BI}$ und $\overrightarrow{BK}$:

$$\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0{,}5-0 \\ 0{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\cos\gamma = \frac{\langle \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BK} \rangle}{|\overrightarrow{BI}| \cdot |\overrightarrow{BK}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1{,}5}}$$

Rechenfehler $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\gamma \approx \cancel{74{,}67°} \quad 54{,}74°$$

Dann Vektoren $\overrightarrow{IK}$ und $\overrightarrow{IB}$

$$\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0{,}5-1 \\ 0{,}5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\gamma = \frac{\langle \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IB} \rangle}{|\overrightarrow{IK}| \cdot |\overrightarrow{IB}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \underline{60°}$$

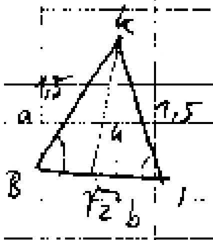
[illegible]

5. zu Dann eben anders: Pythagoras

$\overline{KB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{1{,}5}$ LE

$\overline{KI} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{1{,}5}$ LE

$\overline{BI} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ LE ✓



$\overline{BK} \mathrel{\hat=} a$

$\overline{BI} \mathrel{\hat=} b$

$h = \sqrt{1{,}5^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2{,}25-0{,}5} = \sqrt{1{,}75}$ (v)

$\cos\gamma = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1{,}5}$ (v) $\cos\gamma = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$

$\gamma = 61{,}87°$ (v)

Da $\overline{BK} = \overline{KI}$, ist der Winkel zw. $\overline{BK}$ und $\overline{BI}$ genauso groß, wie zw $\overline{KI}$ und $\overline{BI}$, nämlich 61,87°. (v)

Die Summe der Winkel im Δ sind 180°, also:

$$180 - 2\cdot 61{,}87° = 56{,}26°$$

Der Winkel, den $\overline{BK}$ und $\overline{KI}$ einschließen, ist 56,26°. (v) 6/8

7. $x + \sqrt{x+6} - 2{,}75 = 0$

$\sqrt{x+6} = 2{,}75 - x$ ✓ | Quadrieren

$x+6 = 7{,}5625 - 5{,}5x + x^2$

$x^2 - 5{,}5x + 1{,}5625 = 0$ Normalform (v)

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 2{,}75 \pm \sqrt{(2{,}75)^2 - 1{,}5625}$

$= 2{,}75 \pm \sqrt{6}$

$x_1 = 2{,}75 + \sqrt{6}$ $x_2 = 2{,}75 - \sqrt{6}$ (v)

Probe x_2 Näherungswert TR $0{,}06 \overset{?}{=} 0$ w.A. 7/9

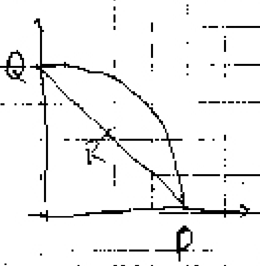
Probe für x_1?

(6) Es handelt sich um eine lineare Abbildung, da $\vec{?}$; j

0/1

Nachtrag (nach Auswertung)

keine lineare Abbildung



P(1|0)
Q(0|1)
R(0,5|0,5)

wenn f lineare Abbildung ist, ist das Bild wieder eine Gerade.

Q ? bleibt unverändert, R ändert sich

↳ keine lineare Abbildung

(8) $\sqrt{20} = 4 + (\sqrt{20}-4)$ $\quad a_0 = 4$ ✓

$$\frac{1}{\sqrt{20}-4} = \frac{\sqrt{20}+4}{20-16} = \frac{\sqrt{20}+4}{4} \quad a_1 = 2 \checkmark$$

$$\cancel{2}\ \frac{1}{\frac{\sqrt{20}+4}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{20}-4}{4}} \qquad = 2 + \left(\frac{\sqrt{20}+4}{4} - 2\right) \quad a_2 = 8 \checkmark$$

KB: $4 + \frac{1}{2+\frac{1}{8}} = 4 + \frac{1 \cdot 8}{17} = \frac{68}{17} + \frac{8}{17} = \frac{76}{17}$

$\frac{76}{17} \approx 4,47$

$\left|\sqrt{20} - \frac{76}{17}\right| = 0,004$ ✓

$\sqrt{20} \approx \cancel{[2,8,4]}\ [4;2,8]$

Ein endlicher Kettenbruch mit 3 Folgegliedern liegt bereits unter der geforderten Abweichung! ✓

8/9