Berliner Hochschule für Technik
Fachbereich II Mathematik – Physik – Chemie
Prof. Dr. Martin Oellrich

Klausur Mathematik I für Medieninformatiker

03.02.202~~2~~3

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	
Codewort	
Letzte Wiederholung dieser Prüfung gemäß RPO: Ja ☐ Nein ☒	

Bitte füllen Sie das Deckblatt bis hierher aus und lesen Sie die wichtigen Hinweise auf der Rückseite dieses Heftes.

Ich wünsche Ihnen **viel Erfolg!**

Zuordnung von Prozentwerten zu Noten:

$\geq 94.5\%$	1.0	$\geq 78.0\%$	2.0	$\geq 61.5\%$	3.0	$\geq 45.0\%$	4.0
$\geq 89.0\%$	1.3	$\geq 72.5\%$	2.3	$\geq 56.0\%$	3.3	$< 45.0\%$	5.0
$\geq 83.5\%$	1.7	$\geq 67.0\%$	2.7	$\geq 50.5\%$	3.7		

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
maximal	10	8	9	8	~~10~~ 9	~~45~~ 44
erreicht	$7\frac{1}{2}$	7	9	7	$7\frac{1}{2}$	38

Prozent:

Klausur + Anrechnung = Σ
86,36% + 17,34% = 103,70%

Note: 1,0 MOe

klasse!

1. Aufgabe

(5 · 2 Punkte)

Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen an, ob sie wahr ist oder nicht. Geben Sie jeweils knappe Begründungen dazu.

Kreisen Sie die richtige Antwort ein, z.B. so: ja nein

Sollten Sie Ihre Entscheidung zurücknehmen wollen, so streichen Sie den Kreis *unmissverständlich* durch und umkreisen die andere Alternative.

Die 8 logischen Operationen lassen sich bekanntlich auf nur drei wesentliche reduzieren: '$\neg$' '$\wedge$' '$\vee$'. Tatsächlich reichen auch zwei aus, da sich '$\vee$' nur durch '$\neg$' und '$\wedge$' ausdrücken lässt.

ja nein

$a \vee b \Leftrightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)$

a b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$\neg(\neg a \wedge \neg b)$
0 0	1	1	1	0
0 1	1	0	0	1
1 0	0	1	0	1
1 1	0	0	0	1

2

Es gilt die folgende Tautologie:
$\forall k \in \mathbb{N}: \exists n \in \mathbb{N}: k|n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: k|n$.

ja nein

links: Jede Zahl ist mind. durch sich selbst teilbar. Also ist linke Seite wahr.
rechts: Jede Zahl ist mindestens durch 1 teilbar, also auch wahr.
Die Tautologie gilt, da beide Seiten den gleichen Wahrheitswert haben.

2

Sie kennen die *symmetrische Differenz*:
$A \triangle B := \{ x \in G \mid (x \in A) \oplus (x \in B) \}$.
Die Potenzmenge ist unter dieser Operation abgeschlossen, d.h.
$A, B \in \mathcal{P}(G) \;\Rightarrow\; A \triangle B \in \mathcal{P}(G)$.

ja nein

Wenn A und B Elemente einer übergeordneten Potenzmenge, dann ist auch eine Kombination aus beiden (wenn auch mit „Abzügen") weiterhin Teil der Potenzmenge

Sie gehen nicht auf die Operation '$\triangle$' ein. −1

1

Die Inverse einer antisymmetrischen Relation $R \subseteq G^2$ ist wieder antisymmetrisch.

ja nein

Voraussetzung für Antisymmetrie:
$xRy \wedge yRx \Leftrightarrow xRy \wedge xR^{-1}y \Leftrightarrow yR^{-1}x \wedge yRx$
$\Rightarrow x = y$

was ist z. z.? dann zeigen Sie es −1

1

Es seien $f: A \to B$ und $g: B \to C$ zwei injektive Funktionen. Dann ist ihre Verkettung $g \circ f: A \to C$ wieder eine injektive Funkion. (Es geht hier nur um die Injektivität, nicht die Funktionseigenschaften.)

ja ~~nein~~

$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
$g(x) = g(x') \Rightarrow \cancel{x} = x'$
$f(g(x)) = f(g(x')) \Rightarrow x = x'$

Zwischenschritt! $-\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}$

$7\frac{1}{2}$

2. Aufgabe

(8 Punkte)

Betrachten Sie folgende Identität, die für natürliche Zahlen n gilt:

$$\left(\sum_{i=n_0}^{n} 3^{i-1} =\right) 1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)\,.$$

Beweisen Sie diese Gleichung mittels vollständiger Induktion. Finden Sie dabei das kleinste n_0, für das diese Behauptung gilt. Notieren Sie im (IA) und (IS) vorab, was zu zeigen ist. Markieren Sie den Schritt, in dem (IV) angewandt wird.

IA mit $n_0 = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} 3^{i-1} = 3^0 = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(3^1 - 1) \checkmark$$

IV: Die oben stehende Identität gelte für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}^{\geq n_0}$, also $n \in \mathbb{N}$. f Genau das darf hier nicht stehen! Das wollen Sie gerade erst zeigen. -1

Induktionsbehauptung: Also gelte die Identität auch für $n+1$.

Dann gilt: $\sum_{i=1}^{n+1} 3^{i-1} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$. $\checkmark$

IS: $\sum_{i=1}^{n+1} 3^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} + 3^{(n+1)-1} = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} + 3^n \quad |\,\text{(IV)} \checkmark$

$= \frac{1}{2}(3^n - 1) + 3^n \quad |\,\text{Bruchemweiterung}$

$= \frac{(3^n - 1)}{2} + \frac{2 \cdot 3^n}{2} \quad |\,\text{Bruchaddition}$

$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} \overset{\text{Dt}}{\underset{\text{D}}{=}} (3^n - 1 + 3^n + 3^n) \cdot \frac{1}{2} \overset{\text{K}}{=} (3 \cdot 3^n - 1) \cdot \frac{1}{2}$

$\overset{\text{Pot}}{=} (3^{n+1} - 1) \cdot \frac{1}{2} \overset{\text{K}}{=} \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) \quad \square \checkmark$

Somit ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Identität aus der Aufgabenstellung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

7

3. Aufgabe (4 + 5 + 2* Punkte)

1. Zeigen Sie die folgende Tautologie:

$$(*) \qquad (a \to c) \wedge (b \to c) \;\Leftrightarrow\; (a \vee b) \to c\,.$$

   Beweisen Sie sie durch Anwendung der bekannten logischen Regeln, nicht mit einer Wertetabelle. Verwenden Sie pro Schritt nur eine Regel und benennen Sie sie.

2. Zeigen Sie die folgende Mengenregel:

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; A \cup B \subseteq C\,.$$

   Wenden Sie dazu die bekannten prädikatenlogischen Definitionen und Regeln an. Verwenden Sie pro Schritt nur eine Definition bzw. Regel und benennen Sie sie.
   (Tipp: Sandwich-Beweis. Sie können (∗) als Regel benutzen.)

3. *(optional, max. 2 Zusatzpunkte)*
   Gilt diese Mengenregel auch dann, wenn Sie '∪' durch '∩' ersetzen? Keine formale Begründung nötig, machen Sie Ihren Befund ausreichend plausibel.

1. $(a \to c) \wedge (b \to c)$ | '→'

$\Leftrightarrow (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$ | D

$\Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b) \vee c$ | deM

$\Leftrightarrow \neg(a \vee b) \vee c$ | '→'

$\Leftrightarrow (a \vee b) \to c$ ✓

2. $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$ | Def '⊆', folgendes gilt für selbe Elemente x

$\Leftrightarrow \forall x: (x \in A \to x \in C) \wedge \cancel{\forall x}: (x \in B \to x \in C)$ | (∗) ← Q(11) fehlt −1

doch! $\forall x$

$\Leftrightarrow \forall x: (x \in A \vee x \in B \to x \in C)$ | Def '∪'

$\Leftrightarrow \forall x: (x \in A \cup B \to x \in C)$ | Def '⊆'

$\Leftrightarrow \cancel{\forall x}: A \cup B \subseteq C$

3. Aufgabe

3. Da $A \cap B \subseteq A \cup B$ * gilt, ist auch
$A \cap B \subseteq C$.

Das ist '$\Rightarrow$' - OK. +1
Was ist mit '$\Leftarrow$'?

* Der Schnitt zweier Mengen ist Teil der Vereinigung zweier Mengen.

9

4. Aufgabe (2 + 4 + 2 Punkte)

500 Studierende wurden befragt:

120 gaben an, dass sie nur 1 oder 2 Module belegt haben
380 gaben an, dass sie 3 oder mehr Module belegt haben
325 gaben an, dass sie häufig in die Mensa gehen
175 gaben an, dass sie selten oder nie in die Mensa gehen.

Es liegt nah, dass diejenigen, die viele Module belegt haben, auch häufig in die Mensa gehen. Ob diese Erhebung das wohl bestätigt?

1. Definieren Sie für die erhobenen Gruppen jeweils eine benannte Menge.
2. Mindestens wieviele Befragte haben sowohl viele Module belegt als auch essen häufig in der Mensa? Drücken Sie die gesuchte Größe aus durch eine Formel in den obigen Mengen. Machen Sie die Herleitung der Abschätzung nachvollziehbar.
3. Prüfen Sie, ob die Anzahl derjenigen Befragten, die sowohl viele Module belegt haben als auch häufig in der Mensa essen, in beiden Gruppen die Mehrheit ist. (Falls ja, würde das die Vermutung bestätigen.) Notieren Sie zuerst, was zu prüfen ist.

1. $G := \{$ alle befragten Studenten$\}$
$M_1 := \{x \in G \mid x \text{ belegt 1 oder 2 Module}\}$, $|M_1| = 120$
$M_2 := \{x \in G \mid x \text{ belegt } \geq 3 \text{ Module}\}$, $|M_2| = 380$
$M_3 := \{x \in G \mid x \text{ geht häufig in die Mensa}\}$, $|M_3| = 325$
$M_4 := \{x \in G \mid x \text{ geht selten/nie in die Mensa}\}$, $|M_4| = 175$ ✓

2. ges: $|M_2 \cap M_3|$

$|M_2 \cap M_3| \overset{(*)}{=} |M_2| + |M_3| - |M_2 \cup M_3|$ $|*$

$(*)$ $G = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \rightarrow M_2 \cup M_3 \overset{\cap}{=} G \setminus (M_1 \cup M_4)$

$\wedge$ schon hier $-\frac{1}{2}$

$= |M_2| + |M_3| - |G \setminus (M_1 \cup M_4)|$ $\quad | \, |\setminus|$

$= |M_2| + |M_3| - (|G| - |M_1 \cap M_4|)$

4. Aufgabe

(NR): $\begin{array}{r} 380 \\ 325 \\ \hline 705 \\ -500 \\ \hline 205 \end{array}$

zu 2. (fortsetzend):

$= |M_2| + |M_3| - (|G| - |M_1 \cap M_4|)$ ID

$= |M_2| + |M_3| - |G| + \underbrace{|M_1 \cap M_4|}_{\geq 0}$ ✓

$\rightarrow |M_2 \cap M_3| \geq |M_2| + |M_3| - |G| = 380 + 325 + (-500) = 205$ ✓

$|M_2 \cap M_3| \geq 205$: Mindestens 205 befragte Studenten belegen ≥ 3 Module und essen häufig in der Mensa. ✓

3. Für jede zu untersuchende Menge ist zu untersuchen, ob $|M_2 \cap M_3| > \frac{1}{2}|A|$, wobei von einer ~~einfachen Mehr-heit~~ (50%) ausgegangen wird und A die zu untersuchende Menge ist. Im Folgenden wird ein Summand $x \in \mathbb{N}_0$ eingeführt, da nicht bekannt ist, ob $|M_2 \cap M_3| = 205$ gilt.

$|M_2 \cap M_3| = 205 + x > \frac{190}{1} = \frac{380}{2} = \frac{1}{2}|M_2|$
(wahre Aussage)

$|M_2 \cap M_3| = 205 + x > 163 = \lceil \frac{325}{2} \rceil = \lceil \frac{1}{2}|M_3| \rceil$
(wahre Aussage)

In beiden Gruppen sind diejenigen in der einfachen Mehrheit, die auch der jeweils anderen Gruppe angehören. ✓

⊗ Sie verwenden hier eine wichtige Eigenschaft, ohne sie zu erwähnen: $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $M_3 \cap M_4 = \emptyset$

$-\frac{1}{2}$

7

5. Aufgabe (4 + 2 + 3 + 1 Punkte)

Es sei $G := \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Relation

$$F := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 = x \}.$$

Geben Sie im Folgenden bei 1.-3. an, was zu zeigen ist. Dann zeigen Sie es.

1. Ist F eine Funktion? Wenn nein: wie können Sie eine Funktion daraus machen? Geben Sie die Funktionsvorschrift $f(x) = y$ an.
2. Ist F injektiv? Wenn nein: wie können Sie sie injektiv machen?
3. Ist F surjektiv? Wenn nein: wie können Sie sie surjektiv machen?
4. Nachdem Sie F bijektiv gemacht haben, geben Sie die Formel $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion an.

1. Umstellen der Relationsvorschrift:

$xy - 1 = x \mid +1$

$\Leftrightarrow xy = x + 1 \mid : x \neq 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x}$ (Funktionsvorschrift)

$*$: $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xFy$

Die Linkstotalität$*$ ist für den Definitionsbereich der reellen Zahlen verletzt, da $\frac{x+1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist.

Das lässt sich ~~unter~~ aber so beheben:

Das ist zuviel des Guten! y braucht diese Einschränkung nicht

$F' := \{ (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \mid y = \frac{x+1}{x} \}$

$-\frac{1}{2}$

Diese „korrigierte" binäre Relation wäre eine Abbildung, wenn noch zudem die Rechtseindeutigkeit nachgewiesen wird:

$xF'y \wedge xF'y' \Rightarrow y = y'$ ✓

Beweis: $xF'y \wedge xF'y'$

$\Leftrightarrow xy - 1 = x \wedge xy' - 1 = x$

5. Aufgabe

zu 1.:

warum diese unnötige Einschränkung? Teilen Sie hier durch $x \neq 0$

$\Leftrightarrow xy - 1 = x \wedge xy' - 1 = x \quad | -xy, -xy'$

$\Leftrightarrow -1 = x - xy \wedge -1 = x - xy' \quad | D$

$\Leftrightarrow -1 = x(1-y) \wedge -1 = x(1-y') \quad | : (1-y) \neq 0$!

Achtung! $-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{(1-y)} = x \wedge -\frac{1}{(1-y')} = x \quad |$ Gleichsetzen

$\Rightarrow -\frac{1}{(1-y)} = \frac{-1}{(1-y')} \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-y)} = \frac{1}{(1-y')} \quad | \cdot (1-y)(1-y')$

$\Leftrightarrow 1-y = 1-y' \quad | -1$

$\Leftrightarrow -y = -y' \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow y = y' \quad \square$

* Es wird nur Rechtseindeutigkeit geprüft; ob kein $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ einem bestimmten $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ zuweisbar ist, ist ja nicht zu zeigen.

Funktionsvorschrift: $f(x) = y = \frac{x+1}{x}$ ✓

was ist z.z.? -1

zu 3. $xy - 1 = x \quad | -xy$

$\Leftrightarrow -1 = x - xy \quad | D$

$\Leftrightarrow -1 = x(1-y) \quad | : (1-y)$ **

$\Leftrightarrow -\frac{1}{1-y} = x$

** Rechtstotalität ist nur gegeben, wenn $y \neq 1$, da Division durch 0 nicht definiert ist.

F' kann aber folgendermaßen surjektiv gemacht werden:

$F'' := \{(x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{0,1\})^2 \mid y = \frac{x+1}{x}\}$

auch hier zuviel des Guten: $x = 1$ ist erlaubt $-\frac{1}{2}$

Diese Seite steht Ihnen für alle Aufgaben zur Verfügung. Bitte geben Sie unbedingt auf der jeweiligen Aufgabenseite einen Verweis hierher!

5.2. Prüfung der Injektivität/Linkseindeutigkeit von F'':

$x F'' y \wedge x' F'' y \Rightarrow x = x'$ ✓

$x F'' y \wedge x' F'' y \quad |$ Funktionsvorschrift

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{x+1}{x} \wedge y = \frac{x'+1}{x'} \quad |$ Gleichsetzen

$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x} = \frac{x'+1}{x'} \quad | \cdot xx' \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)\, xx' = (x'+1)\, xx' \quad |$ D

$\Leftrightarrow \quad x^2 x' + xx' = x x'^2 + xx' \quad | -xx'$

$\Leftrightarrow \quad x^2 x' = x x'^2 \quad | : x \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x x' = x'^2 \quad | \cancel{a \cdot a = a^2} \; : x' \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x = x'$

5.4.:

Herleitung siehe 5.3:

$x = f^{-1}(y) = -\frac{1}{1-y}$ ✓

$7\frac{1}{2}$

Diese Seite steht Ihnen für alle Aufgaben zur Verfügung. Bitte geben Sie unbedingt auf der jeweiligen Aufgabenseite einen Verweis hierher!

Wichtige Hinweise

1. Diese Klausur ist eine **Prüfungsleistung im Sinne der RPO**. Ein Täuschungsversuch führt zu einem sofortigen *Ausschluss von der Teilnahme* unter Einziehung des Klausurheftes. Der Versuch zählt dann mit *Note 5.0.*
2. Vor Beginn der 120-minütigen Bearbeitungsphase werde ich zu Ihnen kommen und Ihre Identität überprüfen. Bitte halten Sie einen amtlichen Lichtbildausweis bereit. **Ohne Ausweis keine Bewertung.**
3. Nach Beginn der Bearbeitungsphase zählt Ihr Teilnahmeversuch in jedem Fall.
4. **Während der Bearbeitung sind zugelassen:**
   - Die von mir zur Verfügung gestellten Handouts, ggf. mit Ihren schriftlichen Nachbereitungen darauf. *Darauf steht Ihr Name.*
   - Maximal zwei von Ihnen beidseitig beschriftete DIN A 4-Blätter, bei Ausdruck oder Kopie nicht kleiner als mit 12-Punkt-Schrift. *Darauf steht Ihr Name.*
   - Dieses Klausurheft.
   - Permanente, nicht editierbare Schreibstifte.
5. **Nicht zugelassen sind:**
   - Mein Skript, Aufgabenstellungen oder Lösungen von Aufgabenblättern.
   - Jegliche Formelsammlungen.
   - Jegliche elektronische Geräte, die mehr können als die laufende Uhrzeit anzeigen.
   - Jegliche editierbaren Schreibstifte.
6. Schreiben Sie sämtliche Schritte, die gewertet werden sollen, auf die **dafür vorgesehenen Heftseiten**. Sollten Sie dafür weiteres **freies Papier** benötigen, so bekommen Sie das ausschließlich von mir. Anderes Material werde ich nicht akzeptieren.

   Als **Konzeptpapier** dürfen Sie eigenes *freies* Papier benutzen. Es bleibt selbstverständlich an Ihrem Platz.

   Wenn Sie Text aus der Wertung nehmen wollen, rahmen Sie ihn bitte ein und streichen ihn erkennbar durch. Zwei verschiedene angebotene Lösungen werden **beide nicht bewertet**.
7. Es gibt **Punkte für alle Teile** eines Lösungsweges: Ansatz, Rechnung und Ergebnis. Alle Ihre Schritte müssen begründet und **klar nachvollziehbar** sein.
8. Diese Klausur gilt als **bestanden**, wenn Sie insgesamt mindestens **45% der Punkte** erreichen. Ihre Bonus-Prozente aus Vorleistungen werden dabei einbezogen. Die Differenzierung in Noten erfolgt gleichmäßig innerhalb des Bereichs 45–100% der Punkte (siehe erste Seite).
9. Wenn Sie auf der ersten Seite ein selbst gewähltes **Codewort** eintragen, kann ich Ihnen Ihre Note schon vor der Rückgabe über Moodle mitteilen.