B

Mathematatik I

Bachelor Medieninformatik
Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. Marlene Müller
[redacted]

Klausur 31. Januar 2017

Erlaubte Hilfsmittel: *Formelsammlung (ohne eigene Notizen), ein A4-Blatt mit selbst zusammengestelltem Inhalt, Taschenrechner, permanente Schreibstifte, leere Schreibblätter*

Bitte verwenden Sie keinen Bleistift zum Schreiben und keine Korrekturmittel (Tipp-Ex etc.). Notieren Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedem Blatt, das Sie abgeben. Kennzeichnen Sie bitte auch klar, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Die Bearbeitungszeit beträgt 105 Minuten. Zum Bestehen der Klausur sind 48 Punkte notwendig. Ihre Bonuspunkte werden angerechnet.

Wichtig: *Geben Sie bitte bei allen zu berechnenden Größen auch Ihre verwendete Berechnungsformel mit an oder erläutern Sie ggf. kurz Ihren Lösungsweg.*

Bitte folgendes Feld für die Auswertung freilassen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	[+Bonus]	Summe
erreichte Punkte	14	15	14	20	19	18	10	110
max. Punkte	14	15	14	20	19	18	[+12]	100

Note: 1,0

Beste Klausur :)

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Aufgabe 1 (14 P.)

(a) Es seien x, y und z Aussagevariablen. Geben Sie eine Wahrheitstabelle für den folgenden Ausdruck an

$$(x \to z) \leftrightarrow (z \to y)$$

und leiten Sie mit Hilfe des KV-Verfahrens eine semantisch äquivalente Formel her.

(b) Prüfen Sie, ob die folgende Gleichung für drei beliebige Mengen A, B, C gilt:

$$(A \cap B) \setminus C \stackrel{?}{=} (A \setminus C) \cap B$$

Wenn die Gleichung stimmt, beweisen Sie sie mit Hilfe der Regeln der Mengenlehre. (Geben Sie bitte alle verwendeten Regeln an.) Andernfalls geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2 (15 P.)

(a) Berechnen Sie: $\binom{2018}{2016}$

(b) Ist die folgende Aussage für $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wahr? (Begründen Sie!)

$$\forall x \in M : \binom{6}{x} \leq 10$$

(c) Wieviele (theoretisch mögliche) Wörter kann man durch Umsortierung der Buchstaben des Worts MOODLE bilden, wenn ...

(c.1) ... diese Wörter mit O anfangen und enden sollen?

(c.2) ... diese Wörter mit dem Buchstaben M beginnen sollen?

(d) Für den Zugang zu einer IT-Anlage muss eine Pin gewählt werden, die 3-, oder 4- oder 5-stellig sein soll. Die Pin darf aus den Ziffern 0,1,...,9 bestehen und und es sei erlaubt, auch gleiche Ziffern zu verwenden. Wieviele verschiedene Pins gibt es?

Aufgabe 3 (14 P.)

Wir betrachten hier $A = \{x, y\}$ und $B = \{x, y, z\}$.

(a) Schreiben Sie folgende Mengen auf:

(a.1) $B \setminus A$ (a.2) $B \cup A$

(a.3) $\mathcal{P}(A)$ (a.4) $\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)$

(b) Berechnen Sie die Mächtigkeiten, geben Sie eine Berechnungsformel und das Ergebnis an:

(b.1) $|\mathcal{P}(A \times B)|$ (b.2) $|A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))|$

Aufgabe 4 (20 P.)

Gegeben seien zwei Aussagen $p \Leftrightarrow 1$ und $q \Leftrightarrow 0$ und außerdem die folgenden Mengen:

$$A = \{1,2,3,4,5\}, \quad B = \{1,2,3\} \quad \textbf{wobei } A, B \subseteq \mathbb{N}$$

Mit | bezeichnen wir wie üblich die Teilbarkeitsrelation, d.h. $x \mid y$ heißt „x ist Teiler von y".

Bitte geben Sie (am besten direkt in der folgenden Tabelle) an, welche Aussagen wahr, falsch oder nicht sinnvoll sind. Begründen Sie jeweils kurz!

(a)	$B \in A$ ✓	☐ wahr, weil ... ☐ falsch, weil ... ☒ nicht sinnvoll, weil ... eine Menge nicht Element einer Menge sein kann.
(b)	$q \vee (A \in \mathcal{P}(B))$ $0 \vee \quad 0$ ✓	☐ wahr, weil ... ☒ falsch, weil ... ☐ nicht sinnvoll, weil ...
(c)	$\exists M : M \in \mathcal{P}(A) \wedge \neg(M \subseteq B)$ ✓	☒ wahr, weil ... zB $M=A$ ☐ falsch, weil ... ☐ nicht sinnvoll, weil ...
(d)	$(2 \mid 3) \to (\neg p \vee \neg q)$ $0 \to 1$ ✓	☒ wahr, weil ... ☐ falsch, weil ... ☐ nicht sinnvoll, weil ...
(e)	$\forall x \in \mathbb{N} : (x \mid 4) \to (x \mid 2)$ ✓	☐ wahr, weil ... ☒ falsch, weil ... wenn $x=4 \Rightarrow 1 \to 0 \Leftrightarrow 0$ ☐ nicht sinnvoll, weil ...
(f)	$p \vee (\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B))$ ✓	☐ wahr, weil ... ☐ falsch, weil ... ☒ nicht sinnvoll, weil ... man Potenzmengen nicht logisch in Beziehung setzen kann mit Variablen/Prädikaten

Aufgabe 5 (19 P.)

Gegeben sie die folgende Relation auf der Menge $M = \{1, \ldots, 5\}$:

$$R = \{(x, y) \mid x \cdot y \leq 5 \ \vee \ x = y\}$$

(a) **Geben Sie einen Digraphen zu R und die Adjazenzmatrix von R an.**

(b) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? (Begründen Sie!)

$$\text{(b.1)} \quad \forall x \in M : \exists y \in M : xRy$$
$$\textbf{(b.2)} \quad \exists x \in M : \forall y \in M : xRy$$

(c) Geben Sie die Adjazenzmatrix zu R^{-1} an.

(d) Überprüfen Sie die Relation R auf folgende Eigenschaften: Reflexivität, Symmetrie, **Transitivität und Linearität. (Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.)**

Aufgabe 6 (18 P.)

(a) Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

Geben Sie in der folgenden Wertetabelle die Summe für jeweils $n = 2, 3, 4$ an.

n	2	3	4
$f(n)$	$1/2$ ✓	$4/6 = 2/3$ ✓	$9/12 = 1/4$ ✓
		$+ 1/6$	$+ 1/12$

(b) Beweisen Sie nun die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$$

mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 1)

a)

x	y	z	y	$x \to z$	$z \to y$	$(x\to z) \leftrightarrow (z \to y)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

✓

x	0	0	1	1	y
	1	0	0	0	0
	1	1	1	0	1
z	0	1	1	0	

✓

~~KNF: $(x+y+\bar{z}) \cdot (\bar{x}+y+z)$~~

DF: $(\bar{x} \cdot \bar{z}) + (y \cdot z)$ ✓

b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$

$(A \cap B) \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cap B$ } Differenzenmengen auflösen

$A \cap B \cap \bar{C} = A \cap B \cap \bar{C}$ } Assoziativgesetz ✓

~~sind~~ Die Gleichung stimmt

Aufgabe 2)

a) $\binom{2018}{2016} = \frac{2018!}{2016! \cdot 2!} = \frac{2018 \cdot 2017}{2} = 2\,035\,153$ ✓

b) $\binom{6}{0} = \frac{6!}{6!} = 1 \qquad \binom{6}{6} = \frac{6!}{6!} = 1 \qquad \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$ ✓

Nein sie ist nicht wahr ✓. Nach dem Pascalschen Dreieck ist der höchste Faktor in der Mitte zu finden (also $\binom{6}{3}$ und $\binom{6}{4}$) und dieser ist größer als 10.

c) 1) → $4!$ $(0 \overset{4x}{\ldots} 0)$ ⇒ 24 Wörter ✓

2.) $\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5!}{2} = 60$ ~~Mögli~~ Wörter ✓

d) $10^3 + 10^4 + 10^5 = 111000$ Pins ✓

Aufgabe 3)

a.1) $\{z\}$ a.2) $\{x, y, z\}$

a.3) $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ a.4) ~~[illegible]~~ Siehe letzte Blatt!

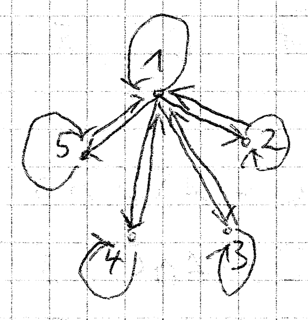
b.1) $|P(A \times B)| = 2^{|A| \cdot |B|} = 2^6 = 64$

b.2) $|A \times P(P(B))| = |A| \cdot 2^{2^{|B|}} = 2 \cdot 2^{2^3} = 512$

Aufgabe 5)

a)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



b) 1.) Wahr, weil für alle x gibt es eine Relation zu $y = 1$

2.) Wahr, weil für alle y gibt es eine Relation mit $x' = 1$

c) $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Reflexivität: ja, weil die Diagonale nur aus Einsen besteht.

Symmetrie: ja, da $R = R^{-1}$

Transitivität:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R \circ R \not\subseteq R \Rightarrow$ nicht transitiv

Aufgabe 5 d)

Linearität: ~~ja, weil immer je 2 Punkte mit einer Kante verbunden sind~~

nein, da gilt $\forall x,y \in M: (xRy \lor yRx \lor x=y)$

Beispiel: $x=4, y=3$: $4R3 \rightarrow$ keine Relation

$3R4 \rightarrow$ kein Relation

$4 \neq 3$ ✓

Aufgabe 6)

a) IA $(n=2)$ ✓ $\quad \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

IV $\quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$ ✓

IS $(n+1)$ $\quad \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ✓

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}}_{(IV)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)-1)}$$

$$= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)(n)} \checkmark$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)+1}{n(n+1)} \checkmark$$

$$= \frac{n^2-1+1}{n^2+n} = \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}(n+1)} = \frac{n}{n+1} \checkmark$$

q.e.d.

Aufgabe 3 a.4)

$P(B) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$

✓

$P(B) \setminus P(A) = \{\{z\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$