Mathematik 1

Bachelor Medieninformatik
Sommersemester 2011

Prof. Dr. Marlene Müller
[redacted]

Klausur 13. Juli 2011

Name, Vorname:

Matrikelnr.: [redacted]

Dritter Versuch und/oder Zeitablauf:

Erlaubte Hilfsmittel: *Formelsammlung (ohne eigene Notizen), max. 3 A4-Blätter mit selbst zusammengestelltem Inhalt, Taschenrechner, permanente Schreibstifte, leere Schreibblätter*

Bitte verwenden Sie keinen Bleistift zum Schreiben und keine Korrekturmittel (Tipp-Ex etc.). Notieren Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedem Blatt, das Sie abgeben. Kennzeichnen Sie bitte auch klar, zu welcher Aufgabe Ihre Lösungen gehören.

Geben Sie bitte – wenn nicht anders angegeben – bei allen zu berechnenden Größen auch Ihre verwendete Berechnungsformel mit an oder erläutern Sie ggf. kurz Ihren Lösungsweg.

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Min. Zum Bestehen der Klausur sind 45 Punkte notwendig. Ihre Bonuspunkte werden angerechnet.

Bitte folgendes Feld für die Auswertung freilassen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	[+Bonus]	Summe
erreichte Punkte	8	19	11	16	16	9	11	8	98
max. Punkte	8	22	15	16	17	11	11	[+10]	100

Note: 1,0

Aufgabe 1 (8 P.)

(a) Berechnen Sie:

$$\binom{12}{10}$$

(b) Es sei n eine natürliche Zahl. Vereinfachen Sie den Ausdruck:

$$\frac{(n+2)!}{n!}$$

(c) Betrachten Sie den Ausdruck $(x+2)^6$ mit dem Binomischen Lehrsatz. Berechnen Sie den Faktor vor dem x^2.

Aufgabe 2 (22 P.)

Es seien die beiden Aussagen p und q betrachtet, wobei

p wahr und q falsch ist.

$p = 1$
$q = 0$

Außerdem betrachten wir die folgenden Mengen natürlicher Zahlen:

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 3, 5\}, \quad C = \{2, 4, 6\}$$

Bitte geben Sie im folgenden an, welche Aussagen wahr, falsch oder nicht sinnvoll sind. Im Fall einer nicht sinnvollen Aussage, geben Sie bitte kurz Ihre Begründung an:

(a)	$q \to p$ $0 \to 1$	☒ wahr ☐ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ...	✓
(b)	$\neg(q \to p) \iff \neg q \vee p$ $0 \iff 1$	☐ wahr ☒ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ...	✓
(c)	$A \in B$	☐ wahr ~~☒~~ falsch ☒ nicht sinnvoll, weil ... nicht sinnvoll, weil B eine Menge von Zahlen, nicht eine Menge von Mengen und A eine Menge.	✓
(d)	$A \in \mathcal{P}(B)$	☒ wahr ☐ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ...	✓
(e)	$A \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$	☒ wahr ☐ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ...	✓
(f)	$(A \cup C) \cap C = C$ $\{1, 2, 4, 6\}$	☒ wahr ☐ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ...	✓
(g)	$p \wedge (4 \in B)$ $1 \wedge 1$	☐ wahr ☒ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ...	✓
(h)	$\neg q \vee (A \in C)$ $1 \vee 0$	☒ wahr ☐ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ... wie (c)	f
(i)	$(4 \in B) \vee (A \subseteq C)$ $0 \vee 0$	☐ wahr ☒ falsch ☐ nicht sinnvoll, weil ...	✓
(j)	$(A \cap B) \vee (A \cap C)$	☐ wahr ☐ falsch ☒ nicht sinnvoll, weil ... „$A \cap B$" eine Menge ergibt und $\vee$ logische Aussagen verknüpft	✓

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

19/22 P.

Aufgabe 3 (15 P.)

Wir betrachten die Grundmenge $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie die folgenden Mengen durch explizite Aufzählung ihrer Elemente an:

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in G \mid x^2 = 1\} \\
B &= \{(x, y) \in G \times G \mid x + y = 5\} \\
C &= \{(x, y) \in G \times G \mid x > 4 \wedge y = 3\} \\
D &= \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in G : y = 2x\} \\
E &= \{x \in G \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (16 P.)

Es sei $A = \{6, 7, 8, 9\}$. Hier betrachten wir die binäre Relation $R \subseteq A \times A$ mit der Adjazenzmatrix:

$$
A(R) = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(a) Geben Sie einen Digraphen zu R an.

(b) Geben Sie die Adjazenzmatrix der inversen Relation R^{-1} an.

(c) Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt R? Welche nicht? (Begründen Sie Ihre Aussagen!)

(d) Welchen der folgenden Ordnungsrelationen entsprechen R und R^{-1}?

$$\leq \qquad < \qquad \geq \qquad >$$

(e) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? (Begründen Sie!)

$$\forall x \in A : xR8 \rightarrow xR6$$

Aufgabe 5 (17 P.)

Wir betrachten folgenden Summenformel:

7 + 11 + 15

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} (4k + 3) = 2n^2 + 5n$$

(a) Geben Sie in der folgenden Wertetabelle die Ergebnisse für $n = 1, 2, 3$ an.

n	1	2	3
$f(n)$	7	18	33

✓

$2 \cdot 1 + 5 \cdot 1$ | $2 \cdot 4 + 5 \cdot 2$ | $2 \cdot 9 + 5 \cdot 3 = 18 + 15$

(b) Beweisen Sie die Summenformel mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 6 (11 P.)

Es seien A und B zwei Teilmengen einer Grundmenge G.

(a) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck durch Umformung soweit wie möglich:

$$\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \cup (A \setminus B)$$

Geben dazu Sie bitte die von Ihnen verwendeten Regeln an.

(b) Prüfen Sie mithilfe von geeigneten Venn-Diagrammen, ob die folgende Gleichheit gilt. Wenn ja, zeigen Sie die Gleichheit beider Ausdrücke mithilfe der Regeln der Mengenlehre. Geben Sie dazu jeweils die von Ihnen verwendeten Regeln an. Wenn nein, finden Sie ein passendes einfaches Gegenbeispiel.

$$(A \cup B) \cap \overline{B} \stackrel{?}{=} A$$

Aufgabe 7 (11 P.)

(a) Es seien die Mengen

$$A = \{2, 3, 4\} \quad \text{und} \quad B = \{2, \ldots, 7\}$$

betrachtet. Berechnen Sie die Mächtigkeiten von

i) $\mathcal{P}(A \cap B)$,

ii) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,

iii) $\mathcal{P}(A \times B)$.

(b) Wir untersuchen Passwörter aus 6 Zeichen, wobei als Zeichen die 26 Buchstaben $\{a, \ldots, z\}$, die 10 Ziffern $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und die 5 Sonderzeichen $\{\#, \$, \%, \&, !\}$ verwendet werden dürfen. Wie lautet die Berechnungsformel für die Anzahl der Passwörter, wenn jedes Zeichen höchstens einmal vorkommen darf?

(c) Wieviele 8-stellige Telefonnummern kann man aus den Ziffern $\{0, \ldots, 9\}$ bilden, wenn die erste Ziffer keine 0 sein darf?

Mathe - Klausur [redacted] 13 Juli 11

1a)

$$\binom{12}{10} = \frac{\cancel{12!}^{12\cdot 11}}{\cancel{10!}\cdot 2!} = \frac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = \frac{132}{2} = 66$$ ✓

b)

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2)\cdot(n+1) = n^2\cdot n + 2n\cdot 2$$ ✓

$$= \cancel{2\left(\frac{n^2\cdot n}{2}\right.} \quad n^3 + 4n$$

c)

$$(x+2)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} x^{6-k}\, 2^k$$

$$= \binom{6}{0}x^6 2^0 + \binom{6}{1}x^5 2^1 + \binom{6}{2}x^4 2^2 +$$ ✓

$$\binom{6}{3}x^3 2^3 + \binom{6}{4}x^2 2^4 + \dots$$

$$\binom{6}{4} = \frac{\cancel{6!}^{5\cdot 6}}{\cancel{4!}\, 2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Vor dem x^2 steht 15, also $15x^2$

$\cdot 2^4 \Rightarrow 240$

8/8P.

3) $G = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{x \in G \mid x^2 = 1\} = \{1\}$ ✓

$B = \{(x,y) \in G \times G \mid x + y = 5\} = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$ ✓

$C = \{(x,y) \in G \times G \mid x > 4 \wedge y = 3\} = \{(5,3), \cancel{(6,3)}\}$ ✓

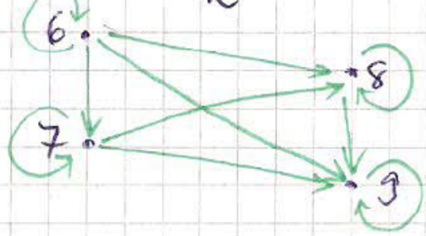
$D = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in G : y = 2x\} = \{2,4,6,8,10\}$ ✓

$E = ?$

11/15P.

Mathe-Klausur [redacted] 13. Juli 11

4) a) R



✓

b)

$$A(R^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

c) R ist reflexiv, da auf der Diagonale der Adjazenz-matrize 1sen stehen, bzw im Digraph jeder Knoten eine Schlinge hat. ✓

R ist nicht symmetrisch, da es im Digraphen keine gegenläufigen Bögen gibt und da die Matrix nicht symmetrisch ist ✓

R ist transitiv, da alle Bögen, die über einen Knoten zu einem weiteren Knoten führen auch mit einer direkten Verbindung vorhanden sind. (z.B. von 6 nach 8 und von 8 nach 9 und von 6 nach 9) ✓

d) $R \mathrel{\hat{=}} \leq \qquad R^{-1} \mathrel{\hat{=}} \geq$ ✓

e) $\forall x \in A : xR8 \rightarrow xR6$

Die Aussage ist falsch, da nicht alle Werte, die in Relation zu 8 stehen auch in Relation zu 6 stehen.

z.B. $7R8 \not\rightarrow 7R6$
 $8R8 \not\rightarrow 8R6$ ✓

16/16P.

Mathe-Klausur [redacted] 13. Juli 11

5)
$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} (4k+3) = 2n^2 + 5n$$

b) IA: $(n=1)$

$$\sum_{k=1}^{1} (4 \cdot 1 + 3) = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1$$
$$7 = 7$$ ✓

IV: (n)

$$\sum_{k=1}^{n} (4k+3) = 2n^2 + 5n$$ ✓

IS: $(n+1)$ zu zeigen: ✓

$$\sum_{k=1}^{n+1} (4k+3) = 2(n+1)^2 + 5(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (4k+3) = \sum_{k=1}^{n} (4k+3) + (4(n+1)+3)$$

$$\underset{IV}{=} 2n^2 + 5n + (4(n+1)+3)$$
$$= 2n^2 + 5n + (4n+4+3)$$
$$\cancel{= 2n^2 + 2 + 5n + 5 + 4n}$$
$$\cancel{= 2(n^2+1) + 5(n+1)} + 4n$$
$$\cancel{2n^2 + 2 + 5n + 5} \quad \cancel{= 2n^2 + 5n + 4n + 7}$$
$$= 2n^2 + 2 + 5n + 5 + 4n \quad = 2n^2 + 9n + 7$$

$$2(n+1)^2 + 5(n+1) \neq 2(n+1)^2 + 5(n+1) + 4n$$

Die Formel konnte nicht bewiesen werden. ?

Warum nicht
$$2(n+1)^2 + 5(n+1)$$
$$= 2n^2 + 9n + 7$$

16/17P.

Mathe-Klausur [redacted] 13. Juli 11

6) a) $A \subseteq G \quad B \subseteq G$

$(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) \cup (A \setminus B)$ de Morgan

$= (\overline{\overline{A \cap B}}) \cup (A \setminus B)$ doppeltes Komplement

$= (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ in logische Ansichte

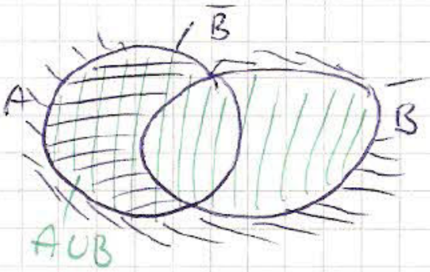
$= (x \in A \land x \in B) \lor (x \in A \land x \notin B)$ Distributivgesetz

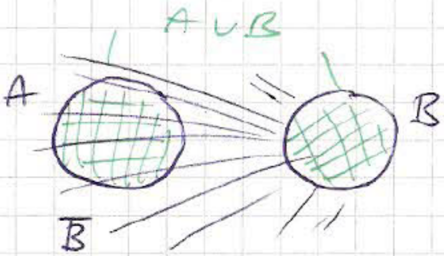
$= \cancel{x \in A \land (} \; x \in A \land (x \in B \lor x \notin B)$

$= x \in A \land 1$

$= x \in A$ ✓ $\Rightarrow$ Ergebnis ist A

b) $(A \cup B) \cap \overline{B} \overset{?}{=} A$





$(A \cup B) \cap \overline{B} \neq A$ bzw. nur dann $= A$, wenn die Mengen A und B disjunkt sind. ✓

Gegenbeispiel:

~~$(A \cup B) \cap \overline{B} \cap ($~~

~~$(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = A$~~

$A = (A \cup B) \cap A$ (Absorption)

9/11 P.

Mathe - Klausur [redacted] 13. Juli 11

7) a) $A = \{2,3,4\}$ $B = \{2,3,4,5,6,7\}$

i) $\mathcal{P}(A \cap B) = 2^3 = 8$ ✓ $|A \cap B| = 3$

ii) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) = 2^3 = 8$ ✓

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$

~~$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset$~~

iii) $\mathcal{P}(A \times B) = 2^{18}$ ✓

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 18$ ✓

b) Passwort aus 6 Zeichen

26 Buchstaben 10 Ziffern 5 Sonderzeichen

Zeichen insgesamt: 41

↝ Variation ohne Widerholung $\left(V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}\right)$

$V_6^{41} = \frac{41!}{35!}$ ✓ $= 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41$

c) 8-Stellige Nummer $\{0, \dots, 9\}$
1. Ziffer keine 0

Variation mit Widerholung $V_k^n(W) = n^k$

1. Stelle: 9^1

2. bis 8. Stelle: 10^7

Gesamt: $9 \cdot 10^7 = 90\,000\,000$ ✓

11/11 P.