Prof.Dr.Göbel	Mathematik 1 MD 1 Prüfung A zum Abschluss des Semesters	WS 2008/2009
Name	Codewort	Matr.-Nr.
Letzte Wiederholung der Prüfung gemäß RPO		O Ja ☒ Nein
Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln bearbeitet habe. Unterschrift :		

Verwenden Sie nur diese Blätter für Ihre Berechnungen und Lösungen.

Alle Ihre Schritte müssen begründet werden und nachvollziehbar sein!
Bitte tragen Sie Ihre Ergebnisse in die doppelt umrandeten Kästchen ein.

Punkte

1. Aufgabe	26	28
2. Aufgabe	12	8
3. Aufgabe	12	7
4. Aufgabe	11	2
5. Aufgabe	6	4
6. Aufgabe	10	8
7. Aufgabe	8	8
Gesamt	85	~~8~~ 65 Gö

Maximal 80 Punkte werden gewertet. Bei mindestens 36 Punkten: bestanden!

Note
1,0 Göbel

Prima!

Zuerst: **Genau lesen**

Dann: **Denken**

Dann: **Viel Erfolg!**

1. Kleinaufgaben. **Begründungen sind hier nicht (!!) notwendig.**

(1) Es seien A = { a, b, c, {∅} , { b , c } }, B = { c, { a , b } } und C = {∅}. Geben Sie an: (i) A ∩ C = ~~{∅}~~ ∅ (ii) B \ A = {{a,b}} (iii) B ∪ C = {c,{a,b},∅} (iv) B x C = {c∅;{a,b}∅}	4 3,9

Paare!

(2) Gegeben sind die reellen Funktionen $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$ und $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ a. Bestimmen Sie für f und g jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Bildbereich.. b. Geben Sie die Zuordnungsvorschriften der unten stehenden Funktionen an und **<u>vereinfachen Sie so weit wie möglich</u>**. Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich. **Zusatzaufgabe**: Geben Sie auch jeweils den Bildbereich an.	2 2 12 10 *** 4

	Zuordnungs-vorschrift	Definitions-bereich	Bild-bereich
a.	$f(x) = \frac{1-x}{x+1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	~~$(-1,\infty)$~~ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
	$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	~~$(-\infty,1)$~~ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
b.	$(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = -1$	$\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ f	**Zusatz** $\{-1\}$
	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ -1	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 1	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
	$g^2(x) = (g \circ g)(x) = g(g(x)) = x$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{1-x}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1$

b.

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{1-x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x-1} = \frac{1-x^2}{x^2-1} = \frac{1-x}{x-1} = \frac{-1\cdot(x-1)}{x-1} = -1$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \frac{\frac{1-x}{x+1}+1}{\frac{1-x}{x+1}-1} = \frac{\frac{1-x+x+1}{\cancel{x+1}}}{\frac{1-x-(x+1)}{\cancel{x+1}}}$$

$$= \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{\frac{x+1}{x-1}+1} = \frac{\frac{x-1-x-1}{\cancel{x-1}}}{\frac{x+1+x-1}{\cancel{x-1}}}$$

$$= \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

$$(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{\cancel{x-1}}}{\frac{x+1-x+1}{\cancel{x-1}}}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

Noch mehr Kleinaufgaben.

(3) Ist die Aussageverbindung. $(\neg q \to p) \leftrightarrow \neg(\neg q \wedge \neg p)$ eine Tautologie?
Falls ja: Formulieren Sie die Tautologie mit Hilfe der semantischen Äquivalenz.

p	q	(¬q	→	p)	↔	¬	(¬q	∧	¬p)
W	W	F	W	W	W	W	F	F	F
W	F	W	W	W	W	W	W	F	F
F	W	F	W	F	W	W	F	F	W
F	F	W	F	F	W	F	W	W	W
Reihenfolge		1	3	2	8	7	4	6	5

$(\neg q \to p)$ hat die gleiche Wahrheitstafel wie $\neg(\neg q \wedge \neg p)$. Das heißt beide sind semantisch äquivalent („$\leftrightarrow$" liefert immer W). Es handelt sich um eine Tautologie. $(\neg q \to p) \Leftrightarrow \neg(\neg q \wedge \neg p)$

4 4

(4) Bestimmen Sie die reelle Faktordarstellung von $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$.
Verwenden Sie das Hornerschema.

$f(x) = (x+1)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = (x+1)^2 \cdot (x-\sqrt{3}) \cdot (x+\sqrt{3})$

4 4

	1	2	-2	-6	-3
-1		-1	-1	3	3
	1	1	-3	-3	$\boxed{0}$
-1		-1	0	3	
	1	0	-3	$\boxed{0}$	

$x^2 + 0x - 3 = 0 \quad | +3$

$x^2 = 3$

$x_1, x_2 = \pm\sqrt{3}$

2. Es seien $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sowie $x = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. a. Bestimmen Sie Vektoren $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$, sodass $V^T \cdot W = E$ ist, wobei $V = (v_1\ v_2\ v_3)$ die 3x3-Matrix mit den Spalten v_1, v_2, v_3 ist, und $W = (w_1\ w_2\ w_3)$ die 3x3-Matrix mit den Spalten w_1, w_2, w_3 ist. Interpretieren Sie w_1, w_2, w_3 geometrisch. $W = (w_1\ w_2 w_3)$ ist Inverse von V^T ***Verwenden Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus!*** b. Stellen Sie den Vektor x als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 dar. c. Stellen Sie den Vektor x als Linearkombination von w_1, w_2 und w_3 dar. d. Bestimmen Sie: det V, det V^{-1}, det W und det W^{-1}.	12
a. ***Zur Kontrolle***: $w_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $w_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $w_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$	4
b. $x = \underline{-1\cdot}\ v_1 + \underline{(-1)\cdot}\ v_2 + \underline{3\cdot}\ v_3$	2
c. $x = \_\_\_\_\ w_1 + \_\_\_\_\ w_2 + \_\_\_\_\ w_3$	1
d. det V = $\underline{-3}$, det V^{-1} = ______, det W = ______, det W^{-1} = ______	1

$V = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $V^T = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$V^T \cdot W = E \quad |(V^T)^{-1}\cdot$

$\underbrace{(V^T)^{-1}\cdot V^T}_{E}\cdot W = (V^T)^{-1}\cdot E$

$E \cdot W = (V^T)^{-1}$

W ist Inverse von V^T

$(V^{-1})^T = (V^T)^{-1}$

GA

$\boxed{1}$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 2&0&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&-4&1&-2&1&0\\ 0&-1&1&-1&0&1 \end{array}\right) \quad \cdot(-2)\quad \cdot(-1)$$

$\cdot\boxed{-\frac{1}{4}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&0\\ 0&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&1 \end{array}\right) \quad \cdot(+1)$$

$\cdot\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&0\\ 0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

GJA

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3} \end{array}\right) \quad \cdot\left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\ 0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3} \end{array}\right) \quad \cdot(-2)$$

$W = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&-1&1\\-2&-1&4\end{pmatrix}$ $w_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $w_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$

$w_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

b)

$$
\begin{array}{rrrr|r}
 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) & 0 & -4 & -1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
\cdot\left(\frac{4}{3}\right) & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}
$$

$\cdot(-2)$ $\quad$ $\cdot(-1)$

$x_3 = 3$

$x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_3 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$

$x_1 = 0 - x_3 - 2x_2 = -3 + 2 = -1$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

✓ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det V = \dfrac{1}{-\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}} = -3$ ✓

c)

$$
\begin{array}{rrrr|r}
\cdot 3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\
 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\
 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
(-1) & 0 & -1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
\cdot\left(\frac{3}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 0 \\
 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 \\
 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2}
\end{array}
$$

$\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\left(+\frac{2}{3}\right)$ $\quad$ $\cdot(-1)$

~~$x_3 = \frac{9}{2}$~~

~~$x_2 = -1 + \frac{4}{3} \cdot x_3$~~ $= 5$

$x_1 = 0 + 3 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 = \frac{7}{2}$

~~$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \right\}$~~

~~$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{7}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - 9/2 \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$~~

∞ L mit 1 f. P. x_3

Dann wären doch w_1, w_2, w_3 l.a.! Und das geht nicht!

$x_2 = -1 + x_3$

$x_1 = 3x_3 - 2x_2 = 3x_3 + 2 - 2x_3 = x_3 + 2$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 2 \\ x_3 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$

3. Geben Sie für die folgenden Funktionen an:
Definitionsbereich, Bildmenge und Umkehrfunktion (falls sie existiert!).

	Definitionsbereich 1	Bildmenge 2	Umkehrfunktion (falls sie existiert) 4
a. $f(x) = 4x + 3\|x\|$	$\mathbb{R}$ ✓	$\mathbb{R}$ ✓	$f^{-1}(x) = \begin{cases} x \geq 0 & \frac{1}{7}x \\ x<0 & x \end{cases}$ ✓
b. $f(x) = \log_a(\log_b(x))$	—	—	—
c. $f(x) = \text{sgn}(x)\cdot\text{floor}(x)$	~~$\mathbb{N}_0$~~ $\mathbb{R}$ ✓	$\mathbb{N}_0$ ✓	— ✓

12
7

Begründungen nicht vergessen!

a) $4x + 3|x| = \begin{cases} x>0 & 7x \\ x<0 & x \end{cases}$

$f(0) = 0$

$y = 7x$

$\frac{1}{7}y = x$

$\frac{1}{7}x = y$

$y = x$

$x = y$ x&y vertauschen

Umkehrf.

$f^{-1}(x) = \begin{cases} x>0 & \frac{1}{7}x \\ x<0 & x \end{cases}$

c) Gegenbeispiel:

$x_1 = 1,5$ $\quad \text{sgn}(1,5)\cdot\text{floor}(1,5) = 1 \cdot 1 = 1$

$x_2 = 1,6$ $\quad \text{sgn}(1,6)\cdot\text{floor}(1,6 = 1 \cdot 1 = 1$

$y=1$ hat min. 2 Urbilder! Nicht injektiv!

Es existiert keine Umkehrfunktion! ✓

4. Gegeben sind die Polynome $p(x) = (2 - x^2)^7$ und $q(x) = (2x + 1)^8$. |
---|---
a. Geben Sie die reelle Faktordarstellung von p(x) und von q(x) an. | 2
b. Geben Sie die Grade der unten stehenden Polynome an: | 3
c. Berechnen Sie für k= 0, 3, 18, 21 die Koeffizienten von x^k des Polynoms $p(x) \cdot q(x)$. | 6

Zu a. Reelle Faktordarstellung

$p(x) = (\sqrt{2} - x)^7 \cdot (\sqrt{2} + x)^7 = -(\sqrt{2}x + \sqrt{2})^7 \cdot (x - \sqrt{2})^7$ ✓ $q(x) = 2^8 \cdot (x + \frac{1}{2})^8$ ✓

2

Zu b. Grad

von $(p+q)(x)$: 8 14 von $(p \cdot q)(x)$: 56 22 von $(p \circ q)(x)$: $56 \cdot 2$

0

Zu c. Beim Polynom $p(x) \cdot q(x)$ Koeffizient von

x^0 : ______ x^3 : ______

x^{18} : ______ x^{21} : ______

$(p+q)(x) = 2^8 \cdot (x + \frac{1}{2})^8 + ((\sqrt{2} + x)^7 \cdot (x - \sqrt{2})^7)$

$(p \cdot q)(x) = 2^8 \cdot (x + \frac{1}{2})^8 \cdot (-(x + \sqrt{2})^7 (x - \sqrt{2})^7)$ $8 + 7 + 7 = 22$!

$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(2^8 \cdot (x + \frac{1}{2})^8) = -(2^8 \cdot (x + \frac{1}{2})^8) + \sqrt{2})^7 \cdot$

$(2^8 \cdot (x + \frac{1}{2})^8) - \sqrt{2})^7$ $8 \cdot 7 = 56$

$(2-x^2)^7 = (\sqrt{2}-x)$

$(-x^2+2)$

$-1\cdot(x^2+2)$

5. Für welche $c \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $e^{2x} + e^{-2x} = 4c$
(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) mehr als eine Lösung?
Geben Sie bei den Fällen (ii) und (iii) alle Lösungen an

6 4

(i) Keine Lösung, wenn $\cancel{-\frac{1}{2} <} c < \frac{1}{2}$

Lösungen sind dann:

(ii) Genau eine Lösung, wenn $c = \frac{1}{2}; \cancel{c = -\frac{1}{2}}$

(iii) Mehr als eine Lösung, wenn $c > \frac{1}{2}; \cancel{c < -\frac{1}{2}}$

$$e^{2x} + e^{-2x} = 4c$$

$$e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} = 4c \quad | \cdot (e^{2x})$$

$$e^{4x} + 1 = 4c \cdot e^{2x} \quad | -4c \cdot e^{2x}$$

$$e^{4x} - 4ce^{2x} + 1 = 0$$

$$2x = z$$

$$e^{2*z} - 4ce^{z} + 1 \quad \text{quadr. Gl.}$$

$$e^{z_{1,2}} = 2c \pm \sqrt{4c^2 - 1}$$

$0L: 4c^2 - 1 < 0: \quad -\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$

$1L: 4c^2 - 1 = 0: \quad 4c^2 = 1$

$c^2 = \frac{1}{4}$

$c = \pm \frac{1}{2}$

$2L: 4c^2 - 1 > 0 \quad c > \frac{1}{2} \lor c < -\frac{1}{2}$

$c = \frac{1}{2}$

$e^{z_{1,2}} = 1 \pm \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} - 1} = 1 = e^{z_1}$

$c = -\frac{1}{2}$

$e^{z_{1,2}} = -1 \pm \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} - 1} = -1 = e^{z_1}$

$z = 2x \quad e^{z} = e^{2x}$

$c = \frac{1}{2}$ oder $c = -\frac{1}{2}$

$e^{z} = e^{2x} = 1 \quad \cancel{\rightarrow} x = \frac{1}{2}$ f

6. Betrachtet werden für reelle Zahlen r : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(r) = \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | 10 8

Bestimmen Sie alle Werte von r, für die das Lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b(r)$
(i) keine Lösung besitzt,
(ii) genau eine Lösung besitzt,
(iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

Geben Sie bei den Fällen (ii) und (iii) die Lösungsmengen $\mathbb{L}_{(ii)}$ bzw. $\mathbb{L}_{(iii)}$ an.

Verwenden Sie den Gaußschen Algorithmus!

Ergebnis:

(i) Keine Lösung, wenn r $\ne \frac{1}{3}$ ~~=~~ $r \neq \frac{1}{3}$ (✓)

(ii) Genau eine Lösung, wenn r $= \frac{1}{3}$ (✓) $\mathbb{L}_{(ii)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$

(iii) Unendlich viele Lösungen, wenn r nicht mgl. ✓ $\mathbb{L}_{(iii)} =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & r \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(1)$$

·(-1)
Zeilen ~~Spalten~~ tausch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & r \\ 0 & 0 & -2 & 1-r \\ 0 & -2 & 0 & 1-r \\ 0 & 2 & 2 & r+1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & r \\ 0 & -2 & 0 & 1-r \\ 0 & 0 & -2 & 1-r \\ 0 & 2 & 2 & 1+r \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & r \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}+\frac{r}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1-r \\ 0 & 0 & 2 & 2\cancel{r} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-2) \\ \\ f \end{array}$$

Das Minuszeichen bitte sauber schreiben!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & r \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1+r}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1+r}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3r+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array}$$

(nicht mehr GA)

$x_3 = -\frac{1}{3}$ f

$x_2 = -\frac{1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ f

$3r+1 = 0$

$3r = -1$

$r = -\frac{1}{3}$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3r+1$

$0 = 3r+1$

7.

Betrachtet wird die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a. Berechnen Sie $A^3 - 3A^2 - 2A$.

b. Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a. die inverse Matrix von A.

8

8

---

a. ***Zur Kontrolle:*** $A^3 - 3A^2 - 2A = 6E$

b. Die Inverse von A ist $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ✓

A^3

	2 1 2	2 1 2	
	2 3 -1	2 3 -1	
	-2 0 -2	-2 0 -2	
2 1 2	2 5 -1	16 17 1	
2 3 -1	12 11 3	40 11 3	
-2 0 -2	0 -2 0	0 -2 0	
A	A^2	A^3	

$$\begin{pmatrix} 16 & 17 & 1 \\ 40 & 11 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 12 & 11 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 17 & 1 \\ 40 & 11 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 15 & -3 \\ 36 & 33 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

-12 -18 -6

-4

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2\\
 & & & 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & -1\\
 & & & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2\\
\hline
2 & 1 & 2 & 2 & 5 & -1 & 16 & 17 & 1\\
2 & 3 & -1 & 12 & 11 & 3 & 40 & 45 & 7\\
-2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -4 & -6 & 2
\end{array}$$

$A \qquad A^2 \qquad A^3$

$$\begin{pmatrix} 16 & 17 & 1 \\ 40 & 45 & 7 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -15 & 3 \\ -36 & -33 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -4 & -6 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A^2 - 2A = 6E$$

$$(A^2 - 3A - 2 \cdot E) \cdot A = 6E \quad \Big| \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}(A^2 - 3A - 2E) \cdot A = E = A \cdot A^{-1}$$

$$A^2 - 3A - 2E = A^2 + (-3A) + (-2E)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 12 & 11 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ -6 & -9 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -7 \\ 6 & 0 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot 6$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$