

Prof.Dr.Göbel	Mathematik 1 MD 1	SS 2008
Prüfung B zum Beginn des Semesters		
Name	Codewort	Matr.-Nr.
Letzte Wiederholung der Prüfung gemäß RPO <input type="radio"/> Ja <input checked="" type="radio"/> Nein		
Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln bearbeitet habe		
Unterschrift :		

Verwenden Sie nur diese Blätter für Ihre Berechnungen und Lösungen.

Alle Ihre Schritte müssen begründet werden und nachvollziehbar sein!
Bitte tragen Sie Ihre Ergebnisse in die doppelt umrandeten Kästchen ein.

Punkte	1. Aufgabe	14	12
	2. Aufgabe	10	8
	3. Aufgabe	6	4
	4. Aufgabe	20	17
	5. Aufgabe	14	5
	6. Aufgabe	10	5,5
	7. Aufgabe	6	0
	Gesamt	80	51,5

Bei mindestens 36 Punkten: bestanden!

Note	2,7 <i>Gut</i>
------	----------------

Zuerst:
Genau lesen

Dann:
Denken

Dann:
Viel Erfolg!

1. Kleinaufgaben

(1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$ für reelle Zahlen a, b . Berechnen Sie: A^2, A^3, A^4, A^5 .

44

Zusatzaufgabe: Geben Sie allgemein für $n \in \mathbb{N}$ die Matrix A^n an.

2

	1	0	a	1	0	a	1	0	a	1	0	a		
	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0		
	0	b	1	0	b	1	0	b	1	0	b	1		
1	0	a	1	0b	2a	1	3ob	3a	1	6ob	4a	1	10ob	5a
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	b	1	0	2b	1	0	3b	1	0	4b	1	0	5b	1

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n^2-n}{a} & n \cdot a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n \cdot b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{n}{2}(n-1) \cdot \frac{n}{2} (n-1) \cdot n \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

$$\frac{(n-1) \cdot (n-1)}{(n+1) + (n-1)} = n-1$$

(2) Ist die Aussageverbindung $(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg q \wedge \neg p)$ eine Tautologie?

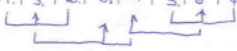
Falls ja: Formulieren Sie die Tautologie mit Hilfe der semantischen Äquivalenz.

p	q	$(\neg p \rightarrow \neg q)$	\leftrightarrow	$\neg(\neg q \wedge \neg p)$
W	W	F	W	F
W	F	F	W	F
F	W	W	F	W
F	F	W	W	W

Die Aussagenverb. ist eine Tautologie. 4

$(\neg p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg q \wedge \neg p)$

Das haben Sie aber nicht gezeigt!



Fortsetzung Kleinaufgaben

(3) Berechnen Sie (muss nicht vollständig ausgerechnet werden!)

$$\sum_{i=1}^{2007} \binom{2008}{i} = \frac{2008}{1} + \frac{2008 \cdot 2007}{2} + \frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{6} + \dots + \frac{2008}{1}$$

$$= 2^{2008} - 2!$$

2
0

(4) Betrachtet wird die Abbildung $f: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ ~~ABGABE~~
 $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}$ (Binomialkoeffizient n über $k!$)

4

Überprüfen Sie, ob diese Abbildung total, injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Diese Abbildung ist total: ja nein , denn: $D_f = \{\binom{n}{k}\}$ Paare!
 $D_f =$ Menge der Zustände

0

Diese Abbildung ist injektiv: ja nein , denn:

$\binom{n}{k}$ hat mehrere Urbilder welche denn???

0,5

Diese Abbildung ist surjektiv: ja nein , denn: weil

$\binom{n}{k}$ ein Urbild hat keine Begründung!

0,5

Diese Abbildung ist bijektiv: ja nein , denn: nicht injektiv

1

$$3) \binom{2008}{1} + \binom{2008}{2} + \binom{2008}{3} + \binom{2008}{4} + \dots + \binom{2008}{2007}$$

$$\frac{2008!}{1! \cdot 2007!} + \frac{2008 \cdot 2007}{2! \cdot 2006!} + \frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{3!} + \frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006 \cdot 2005}{4!} + \dots + \frac{2008!}{2007! \cdot 1!}$$

Allen nicht falsch, aber....
 $2008 + 2015028 + 1347382056 + \dots \cdot i \cdot a \dots$

2. Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 Überprüfen Sie, ob die folgenden Ausdrücke definiert sind.
 Falls ja: geben Sie an, ob es sich dabei um einen Vektor oder eine reelle Zahl handelt
 und vereinfachen Sie weitestgehend.
 (Im Nenner stehende Ausdrücke werden dabei als ungleich Null vorausgesetzt)

10

8

a. $\frac{\alpha \cdot \langle u, v \rangle \cdot u}{\langle \alpha \cdot v, u \rangle} = \frac{(\alpha \cdot v_1 + \alpha v_2 + \alpha v_3) \cdot u}{(\alpha v_1 + \alpha v_2 + \alpha v_3)} = u$ Vektor ✓

b. $\frac{\langle u+v, w \rangle \cdot \alpha \cdot (u+v)}{\beta \cdot (v+u)} = \frac{(u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 + u_3 w_3 + v_3 w_3) \cdot \alpha}{\beta}$ reelle Zahl
 Vektoren dürfen nicht dividiert werden!

c. $\frac{\langle u, u \rangle}{|u|} = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |u|$ reelle Zahl ✓

d. $\frac{\langle u+u, u+u \rangle}{\langle u+u, u \rangle} = \frac{u_1^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_2^2 + 4u_3^2 + 4u_3^2}{2u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_3^2} = 2$ reelle Zahl ✓

e. $\langle \langle v, w \rangle \cdot u, \langle v, w \rangle \rangle$ nicht definiert, da $\langle v, w \rangle$ für das Skalarprodukt nur Vektoren als Parameter zulässig sind ✓

e) $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

$\frac{10}{10} = \frac{100}{100}$ $\frac{10}{\sqrt{10}} \neq \frac{100}{10}$

$\langle v, w \rangle \cdot u = v_1 w_1 u$

Ben auf b. (selbstschade!) : prima

Begründungen nicht vergessen!

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen

a. $2^{x+1} \cdot 5^{x-1} = 3^{x+2}$: $x \approx 2,5860$ ✓ 2

b. $9^x - 1 = 3^x - 3^x$: $x = 0$ 1
*Ergebnis: richtig
 Weg: W.f. falsch.*

c. $\lg(x+1) - \lg((x^2-1)(x+2)) = \lg\left(\frac{1}{x-1}\right)$ 1
 $x = -1$ f 64
← x > 1!

a) $2^{x+1} \cdot 5^{x-1} = 3^{x+2}$ / ~~lg~~

~~$(x+1) \lg(2) + \lg(5)(x-1) = (x+2) \lg(3)$~~

~~$\lg(2)x + \lg(2) + \lg(5)x - \lg(5) = \lg(3)x + \lg(3) \cdot 2$ / $-\lg(3)x$ / $-\lg(5)$ / $-\lg(2)$~~

~~$(\lg(2)x + \lg(5)x - \lg(3)x) = \lg(3) \cdot 2 - \lg(5) - 1$~~

~~$x = \frac{\lg(3) \cdot 2 - \lg(5) - 1}{\lg(2) + \lg(5) - \lg(3)} \approx -0,0875$~~

b) $9^x - 1 = 3^{-x} - 3^x$

~~$9^x - 1 = \frac{1}{3^x} - 3^x$ / ~~lg~~~~

~~$\lg(9^x - 1) = \lg\left(\frac{1-3^{2x}}{3^x}\right)$~~

~~$\lg(9^x - 1) = \lg(1-3^{2x}) - \lg(3^x)$~~

c) $\lg(x+1) - \lg((x^2+1)(x+2)) = \lg\left(\frac{1}{x-1}\right)$

$\lg\left(\frac{x+1}{(x^2+1)(x+2)}\right) = \lg\left(\frac{1}{x-1}\right)$ / 10^*

$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1}$ / $(x-1)$

$\frac{1}{(x+2)} = 1$

$x+2 = 1$ $x = -1$

*Rechnung
ok!*

a) $2^{x+1} \cdot 5 \cdot x^{-1} = 3^{x+2} / \lg$

$(x+1) \lg 2 + (x-1) \lg 5 = (x+2) \lg 3$

$x \lg 2 + \lg 2 + \lg 2 + x \lg 2 + \lg 5 - \lg 5 = x \lg 3 + 2 \lg 3 / + \lg 5 / - \lg 2 / - x \lg 3$

$x \lg 2 + x \lg 5 - x \lg 3 = 2 \lg 3 + \lg 5 - \lg 2$

$x = \frac{2 \lg 3 + \lg 5 - \lg 2}{\lg 2 + \lg 5 - \lg 3} \approx 2,5860$

b) $9^x - 1 = 3^x - 3^x$

$3^{2x} - 1 = \sqrt{\frac{3}{3^x}} - 3^x$

$3^{2x} - 1 = \frac{3^x}{1-3^{2x}}$

$3^{2x} - 1 = -\frac{3^x}{3^{2x} - 1}$

$1 = -\frac{3^x}{3^x}$

Das dürfen Sie nur machen, wenn es möglich ist, also $3^x \neq 1$ oder $x \neq 0$ ist!

$/(: (3^{2x} - 1))$

Das kann nicht sein! $3^x = -1$
 $x \lg 3 = \lg(-1)$
 \lg nicht definiert!

$x = \frac{\lg(-1)}{\lg 3} = \frac{0}{\lg 3}$
 ist es so oder anders?

4. Gegeben sind die reellen Funktionen $f(x) = \frac{1-x}{x}$ und $g(x) = \frac{x}{x-1}$

a. Bestimmen Sie für f und g jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Bildbereich.

b. Geben Sie die Zuordnungsvorschriften der unten stehenden Funktionen an und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich

Zusatzaufgabe: Geben Sie auch jeweils den Bildbereich an.

2
1,5

18
12,5

3
10

	Zuordnungs- vorschrift	Defini- tions- bereich	Bild- bereich
a.	$f(x) = \frac{1-x}{x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$B_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
	$g(x) = \frac{x}{x-1}$	$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$B_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b.	$(f \cdot g)(x) = -1$	$D_f = \mathbb{R}$	Zusatz $B_f = \{-1\}$
	$\frac{f}{g}(x) = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2} = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$B_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
	$(g \circ f)(x) = \frac{1-x}{1-2x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$	$B_f = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$
	$(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$B_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
	$g^2(x) = (g \circ g)(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$B_f = \mathbb{R}$
	$g^{-1}(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$B_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Umkehr-
Abb.!

a) $B_f: y = \frac{1-x}{x} \Rightarrow yx = 1-x \quad | +x$

$yx + x = 1$

$B_g: y = \frac{x}{x-1}$

$x(y+1) = 1$

$x = \frac{1}{y+1} \Rightarrow y \neq -1$ nicht -1 sein ✓

$y(x-1) = x \quad | :y | :x$

$\frac{x-1}{x} = y$

b) $(f \cdot g)(x) = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{x}{x-1} =$

$= \frac{x-x^2}{x^2-x} = -\frac{x-x^2}{x-x^2} = -1$

$\circlearrowleft f(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{(1-x) \cdot (x-1)}{x(x-1)} = \frac{x-x^2-1+x}{x^2} = \frac{2x-x^2-1}{x^2} = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$

$$4b.) \quad g \circ f(x) = \frac{1-x}{\frac{1-x}{x}-1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1-x-x}{x}} = \frac{(1-x)x}{x(1-x-x)} = \frac{1-x}{1-2x}$$

$$f \circ g(x) = \frac{1-\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{1-x-x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{1-x-x}{(x-1) \cdot x} = -\frac{1}{x}$$

$$g^2(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{\cancel{x-1}} = x$$

$$g^{-1}(x) \neq \frac{1}{g(x)} = \frac{x-1}{x}$$

$$y = \cancel{1-x} \cdot 1 - \frac{1}{x}$$

$$y-1 = -\frac{1}{x}$$

$$x = -\frac{1}{y-1}$$

$$x = \frac{1}{1-y}$$

?

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{2x-x^2-1}{x^2}$$

$$y = \frac{2x-x^2-1}{x^2} \quad \# \quad = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2}$$

~~$$y = \frac{2x-x^2-1}{x^2}$$~~



5.

Betrachtet werden für reelle Zahlen r : $A(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & r^2 - 1 \end{pmatrix}$ und $b(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ r+3 \end{pmatrix}$

14

Bestimmen Sie alle Werte von r , für die das Lineare Gleichungssystem $A(r) \cdot x = b(r)$

- (i) keine Lösung besitzt,
 (ii) genau eine Lösung besitzt,
 (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

Geben Sie bei den Fällen (ii) und (iii) die Lösungsmengen $L_{(i)}$ bzw. $L_{(iii)}$ an.

Verwenden Sie den Gaußschen Algorithmus!

Ergebnis:

(i) Keine Lösung, wenn $r = \pm 2$ *Wann?* *nur +2*

(ii) Genau eine Lösung, wenn $r \neq \pm 2$

(iii) Unendlich viele Lösungen, wenn $r = \pm 2$ *= -2!*

Undallgemein für?

$$L_{(ii)} = \text{S.B. } A(r) : L(r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$A(r) : L(r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$L_{(iii)} = \{ \} \text{ *f* }$$

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \\ & 1 & 3 & 0 & 2 \\ & 2 & 3 & r^2 - 1 & r + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & /(-1) \ /(-2) \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & r^2 - 3 & r + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & \textcircled{3} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 1 & /(-1) \end{array}$$

$$\frac{1}{r^2 - 4} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & r^2 - 4 & r + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{r+2}{r^2-4} \end{array}$$

$$= \frac{1}{r-2}$$

$$\text{NR: } \frac{r+2}{(r^2-2^2)}$$

$$\frac{r+2}{(r-2) \cdot \cancel{r+2}}$$

$$= \frac{1}{r-2} = c$$

Das ist nicht erlaubt.

$c = 0$: nicht möglich

$c \neq 0$: $1L$

*Das geht
 das nur, wenn
 $r^2 - 4 \neq 0$*

$\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2}$ hier

*muss die
 Fallunterscheidung
 gemacht werden!*

6.

Betrachtet wird wie in Aufgabe 5 die Matrix $A(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & r^2 - 1 \end{pmatrix}$

10

- a. Bestimmen Sie $\det(A(r))$.
 b. Bestimmen Sie alle $r \in \mathbb{R}$, für die $A(r)$ invertierbar ist.
 c. Wählen Sie ein $r \in \{-2, 0, 2\}$, für das $A(r)$ invertierbar ist, und berechnen Sie die Inverse. **Verwenden Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus.**
 d. Wählen Sie ein $r \in \{-2, 0, 2\}$, für das $A(r)$ nicht invertierbar ist, und stellen Sie die 3. Spalte von $A(r)$ als Linearkombination der ersten beiden Spalten dar.

5,5

a. $\det(A(r)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & r^2 - 1 \end{pmatrix}^{-1} = \sqrt{2} = 4!$

b. $A(r)$ ist invertierbar für $r = 0$

Sind das alle?

c. Die Inverse von $A(0)$ ist $\begin{pmatrix} 12 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. 3. Spalte als LK der beiden ersten Spalten für $r = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-1}{-3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 12 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}$$

Schade, dass Sie nicht die "Probe" gemacht haben!

d)

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} - \\ - \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \quad -2 \\ / \end{array}$$

~~$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 12 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 6a) \textcircled{1} & 1 & 2 & 1 & 0 \\
 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
 & 2 & 3 & r^2-1 & 0 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 \cdot (-1) \\
 & 0 & 1 & -1 & 0
 \end{array}$$

...
 Siehe Bsp 5. da kann man die Multiplikatoren für die Det. ablesen

$$\Rightarrow \det(A(r)) = \frac{1}{r^2-4} = \frac{1}{(r-2)(r+2)}$$

c) ~~... Bsp 5~~

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 \textcircled{1} & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \quad (-1) / (2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 \textcircled{1} & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \quad //
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 \textcircled{-\frac{1}{4}} & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \quad (-1) \uparrow \\
 \hline
 & 1 & 2 & 0 & 4 & -1 & -1 \\
 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \quad (-2) \rightarrow \\
 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1
 \end{array}$$

Sie ändern doch die ganzz. Zile mit $-\frac{1}{4}$ Mult.!

7. Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x)$ an den Stellen $x = 0; 1; 3$ stetig ist.

Begründungen nicht vergessen!

6

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & 0 < x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & 1 \leq x < 3 \\ 2 & 3 \leq x \end{cases}$$

f ist stetig an der Stelle

$x = 0$: ja / nein

$x = 1$: ja / nein

$x = 3$: ja / nein

~~Altklausur~~

$f(0) = 0$ ist stetig

$f(1) = -1 + 4 - 2 = 1$ ist stetig

$f(3) = 2$ ist stetig



Diese Begründungen stimmen alle nicht!