Prof.Dr.Göbel	Mathematik 1 MD 1	SS 2006
	Prüfung A zum Abschluss des Semesters	

Name	Matr.-Nr.
Letzte Wiederholung der Prüfung gemäß RPO	O Ja ☒ Nein

Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln bearbeitet habe.
Unterschrift :

Verwenden Sie nur diese Blätter für Ihre Berechnungen und Lösungen.

Alle Ihre Schritte müssen begründet werden und nachvollziehbar sein!
Bitte tragen Sie Ihre Ergebnisse in die doppelt umrandeten Kästchen ein.

Punkte			
	1. Aufgabe	16	7
	2. Aufgabe	8	7,5
	3. Aufgabe	12	6
	4. Aufgabe	10	8
	5. Aufgabe	14	14
	6. Aufgabe	8	8
	Gesamt	68	50,5

Maximal 60 Punkte werden gewertet. Bei mindestens 27 Punkten: bestanden!

Note
1,3 Göbel

Prima!

Zuerst:
Genau lesen

Dann:
Denken

Dann:
Viel Erfolg!

1. **Kleinaufgaben**. **Begründungen sind nur bei Teil (4) notwendig!**

(1) Geben Sie das an für: ↓	$f(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1)}{x(x-1)^3}$	$g(x) = \frac{(x+2)(3-x)(x-1)}{(x-3)(x-2)(x+2)}$	
Nullstellen	$x_0 = -1$ ✓	$x_0 = 1$ ✓	8
Polstellen	$x_1 = 0$ mit VZW ✓ $x_2 = 1$ mit VZW ✓	$x_1 = 2$ mit VZW ✓ $x_2 = 3$ mit VZW f	6
hebbare Definitions-Lücken	/ ✓	$x_3 = -2$ ✓ hebbar mit $f(-2) = -\frac{3}{4}$ 3!	
Asymptote	$f_A(x) = \frac{2}{x}$ f	$g_A(x) = -1$ ✓	

(2) Vereinfachen Sie: $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \ldots$ | 2 | 0

(3) Vereinfachen Sie: $\binom{5n^2+4106}{5n^2+4105} =$ | 2 | 0

(4) Bestimmen Sie <u>alle</u> <u>ganzzahligen</u> Nullstellen von $p(x) = 2x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 6x$. | 4 | 1

Ganzzahlige Nullstellen sind: 1, 0 ← Wieso?

Begründung! Das Horner-Schema hat mir keine greifbaren geliefert. Außerdem schwer zu erraten, da kein Koeffizient bei x^0. Doch!

1)

$f(x) = \frac{(2x-2)(\cancel{x-1})(x+1)}{x(\cancel{x-1})(x-1)(x-1)} = \frac{(2x-2)(x+1)}{x(x-1)^2} = \frac{2x^2+2x-2x-2}{x(x-1)^2} = \frac{2x^2-2}{x(x-1)^2} = \frac{2(\cancel{x-1})(x+1)}{x(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{2(x+1)}{x^2-x}$ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1,0\}$

NST: $2x^2 - 2 = 0$

$0 = x^2 - 1$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

Asymptote: $(2x+2):(x^2-x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2-x}$ ← Kein Polynom!

$-(2x - \frac{2x}{x}) = (2x-2)$

4

$g(x) = \frac{(\cancel{x+2})(3-x)(x-1)}{(x-3)(x-2)(\cancel{x+2})} = \frac{(3-x)(x-1)}{(x-3)(x-2)} = \frac{3x-3-x^2+x}{x^2-2x-3x+6}$ Polstellen: $x_1 = 2$ mit VZW, $x_2 = 3$ hebbar: $x_3 = -2$ $D_g = \mathbb{R}\setminus\{3,2,-2\}$

Asymptote: $(-x^2+4x-3):(x^2-5x+6) = -1 - \frac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$-(-x^2+5x-6)$

$-x+3$

$\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}} =$ $(k+1)!(n-1-k)!$

4) $p(x) = 2x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 6x \quad |:2$

$f = (x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x) \cdot 2$

$= (x-1)(x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x)$ ⊛

$1: \; 1 - 2 - 4 + 2 + 3 = 0$

~~1: 1 -1 -5 -3~~

$-1: \; 1 + 1 + 5 + 3$

!

	1	-2	-4	2	3	$\cancel{0}$
1		1	-1	-5	-3	0
	1	-1	-5	-3	0	0

⊛ $= 2x \cdot (x-1) \cdot (x^3 - x^2 - 5x - 3)$!!!

2. Bestimmen Sie die Matrix A, für die gilt: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Tipp: Geeignete inverse Matrizen könnten sehr hilfreich sein!*	8 7,5

Ergebnis: $A = \begin{pmatrix} -\frac{10}{8} & 0 \\ -1 \text{ f} & \text{f } \frac{10}{8} \end{pmatrix}$.

inv. Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Linksseitiges Multiplizieren mit B^{-1}:

$$\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 3 \\ & & 2 & 4 \\ \hline \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{array}$$

$\frac{9}{4} - \frac{4}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{2}$

$\frac{3}{2} + \frac{4}{2}$

$\to E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$!

Sch...!

inv. Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

rechtsseitiges Multiplizieren mit C^{-1}:

$$\begin{array}{cc|cc} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{10}{8} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -1 & \frac{10}{8} \end{array}$$

$\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\to A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{E} = \cancel{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}$

$\to A = \begin{pmatrix} -\frac{10}{8} & 0 \\ -1 & \frac{10}{8} \end{pmatrix}$

Bis auf den Rechenfehler: Prima!

$-\frac{5}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{10}{8}$

$-\frac{5}{16} + \frac{5}{16} = 0$

$\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{4}{4} = -1$

$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{10}{8}$

3. Geben Sie für die folgenden Funktionen an:
Definitionsbereich, Bildmenge und Umkehrfunktion (falls sie existiert!).

	Definitionsbereich	Bildmenge	Umkehrfunktion (falls sie existiert)
a. $f(x) = -2x+5$	$D_f = \mathbb{R}$ ✓	$B_f = \mathbb{R}$ ✓	$f^{-1}(x) = \frac{5-x}{2}$ ✓, da injektiv
b. $f(x) = \ln(\ln x)$	$D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ f	$B_f = \mathbb{R}$ ✓	
c. $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ✓	$B_f = \mathbb{R}$ f	

12
6

Begründungen nicht vergessen!

a) $y = -2x + 5$ total, surjektiv, injektiv -> bijektiv

$2x = 5 - y$

$x = \frac{5-y}{2}$ -> $f^{-1}(x) = \frac{5-x}{2}$

c) $y = \frac{1-x}{2+x}$

$(2+x)y = 1-x$

$2+x = \frac{1-x}{y}$

nach x auflösen!

$2y + xy = 1 - x$

$2y = 1 - x - xy$

$2y = 1 - x(1+y)$

$2y - 1 = -x(1+y)$

$-2y + 1 = x(1+y)$

$\frac{-2y+1}{1+y} = x$

b) $y = \ln(\ln x)$

$ey = e\ln(\ln x)$

$ey = \ln x$

$e^2 y = x$

$f^{-1}(x) = e^2 x$ f

$e^y = e^{\ln(\ln x)}$

$e^y = \ln x$

$e^{e^y} = x$

4. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die die folgenden drei Vektoren linear abhängig sind.

$$\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie Ihr Vorgehen.
Verwenden Sie für die Berechnung den Gaußschen Algorithmus.
Geben Sie für **ein** $t \in \mathbb{R}$ den ersten Vektor als Linearkombination der übrigen an.

10 8

Ergebnis:
Die drei Vektoren sind linear abhängig für t = $\frac{14}{5}$

Für t = ____ ist $\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 7 \end{pmatrix} = $ ____ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ + ____ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{0} = \lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v_n}$ → wenn alle $\lambda_n = 0$ → $\vec{v_n}$ lin. unabhängig
↳ wenn das LGS nur 0 als Lösung hat sind die Zeilen- und Spaltenvektoren linear unabhängig

$$\begin{matrix} 1 & 2 & t \\ 3 & 4 & 2t \\ 5 & 5 & 7 \end{matrix} \quad |\cdot(-3),\ |\cdot(-5)$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & t \\ 0 & -2 & -t \\ 0 & -5 & 7-5t \end{matrix} \quad \boxed{\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & \frac{14-5t}{2} \end{matrix} \quad |\cdot 5$$

$$\frac{5t}{2} + 7 - 5t = \frac{5t + 14 - 10t}{2} = \frac{14-5t}{2}$$

$$14 - 5t = 0$$
$$5t = +14$$
$$t = \frac{14}{5}$$

→ Nullzeile im LGS → LGS hat ∞ L → Vektoren sind linear abhängig für $t = \frac{14}{5}$

letzter Teil:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{14}{5} \\ 3 & 4 & \frac{28}{5} \\ 5 & 5 & \frac{98}{5} \end{array} \quad |\cdot(-3)\ \ |\cdot(-5)$$

7!

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{14}{5} \\ 0 & -2 & -\frac{14}{5} \\ 0 & -5 & \frac{28}{5} \end{array}$$

Das haben Sie doch schon gemacht!

$$\frac{14}{5} = x + 2y$$
$$\frac{28}{5} = 3x + 4y$$
$$\frac{98}{5} = 5x + 5y$$

? 7!

$\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{t}{2}\lambda_1 = -\frac{t}{2} = -\frac{7}{5}$

5. Gegeben seien die reellen Funktionen $f(x) = x + 3$ und $g(x) = \frac{x}{x-1}$ a. Geben Sie für f und g jeweils den maximalen Definitionsbereich an.	2 2
b. Geben Sie die Zuordnungsvorschriften der folgenden Funktionen an; stellen Sie sie als gebrochen-rationale Funktionen dar Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich. $f+g;\ \frac{g}{f};\ f\circ g;\ g\circ g$	12 12

	Zuordnungsvorschrift	Definitionsbereich
a.	$f(x) = x + 3$	$D_f = \mathbb{R}$
	$g(x) = \frac{x}{x-1}$	$D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
b.	$(f+g)(x) = x+3+\frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)+3(x-1)+x}{x-1} = \frac{x^2+3x-3}{x-1}$	$D_{f+g} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
	$\frac{g}{f}(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{x+3} = \frac{x}{(x-1)(x+3)}$	$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$
	$(f\circ g)(x) = \frac{x}{x-1}+3 = \frac{x+3(x-1)}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$	$D_{f\circ g} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
	$(g\circ g)(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-1}\cdot(x-1) = x$	$D_{g\circ g} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$(f+g)(x) = x+3+\frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)+3(x-1)+x}{x-1} = \frac{x^2-x+3x-3+x}{x-1} = \frac{x^2+3x-3}{x-1}$$

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{x+3} = \frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+3} = \frac{x}{(x-1)(x+3)}$$

$$(f\circ g)(x) = \frac{x}{x-1}+3 = \frac{x+3(x-1)}{x-1} = \frac{x+3x-3}{x-1}$$

$$(g\circ g)(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{x-1}\cdot(x-1) = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$$

$$\frac{x}{x-1}-1 = 0$$
$$\frac{x}{x-1} = 1$$
$$x = x-1$$

6. Geben Sie die Summendarstellung von $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ an. **8** 8

Berechnen Sie die Koeffizienten von x^k für k = - 4, 0, 1 und 2

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = x^6+6x^4+15x^2+15x^{-2}+6x^{-4}+x^{-6}+20$$

Koeffizient von x^{-4} : 6

Koeffizient von x^{0} : 20

Koeffizient von x^{1} : 0

Koeffizient von x^{2} : 15

$$\left(x+\tfrac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}x^6+\binom{6}{1}x^5\cdot\left(\tfrac{1}{x}\right)+\binom{6}{2}x^4\cdot\left(\tfrac{1}{x}\right)^2+\binom{6}{3}x^3\cdot\left(\tfrac{1}{x}\right)^3+\binom{6}{4}x^2\cdot\left(\tfrac{1}{x}\right)^4$$

$$+\binom{6}{5}x\cdot\left(\tfrac{1}{x}\right)^5+\binom{6}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{x}\right)^6$$

$$= x^6+6\frac{x^5}{x}+15\frac{x^4}{x^2}+20\frac{x^3}{x^3}+15\frac{x^2}{x^4}+6\frac{x}{x^5}+\frac{1}{x^6}$$

$$= x^6+6x^4+15x^2+20+15x^{-2}+6x^{-4}+x^{-6}$$