Prof.Dr.Göbel	Mathematik 1 MD 1	WS 2005/06
	Prüfung A zum Abschluss des Semesters [redacted]	

[redacted]

Letzte Wiederholung der Prüfung gemäß § 12 RPO II   O Ja   ⊗ Nein

Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln bearbeitet habe.
Unterschrift : [redacted]

Verwenden Sie nur diese Blätter für Ihre Berechnungen und Lösungen.

Alle Ihre Schritte müssen begründet werden und nachvollziehbar sein!
Bitte tragen Sie Ihre Ergebnisse in die doppelt umrandeten Kästchen ein.

Punkte

1. Aufgabe	12	12
2. Aufgabe [redacted]	16	16
3. Aufgabe	12	11
4. Aufgabe	12	11
5. Aufgabe	16	14
Gesamt	68	64

Maximal 60 Punkte werden gewertet. Bei mindestens 27 Punkten: bestanden!

Note 1,0 Göbel

Ganz große Klasse!

Zuerst:
Genau lesen

Dann:
Denken

Dann:
Viel Erfolg!

$A \cdot B$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 6 & 5 \\
 & & & 4 & 3 \\
 & & & 2 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 20 & 14 \\
4 & 5 & 6 & 56 & 41 \\
7 & 8 & 9 & 92 & 68
\end{array}
$$

$d^T \cdot d$

$$
\begin{array}{ccc|c}
 & & & -1 \\
 & & & -2 \\
 & & & -3 \\
\hline
-1 & -2 & -3 & 14
\end{array}
$$

$C^T + B$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}
$$

1. **Kurzfragen.** Bitte Zutreffendes ankreuzen bzw. berechnen
Begründungen sind bei dieser Aufgabe nicht notwendig!
Bewertung : Richtiges Kreuz : 1 Punkt Falsches Kreuz : 1 Punkt Abzug

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ist der Ausdruck definiert?		
$B^T \cdot A^T$	☒ Ja	☐ Nein
$d^T \cdot A \cdot d$	☒ Ja	☐ Nein
$C \cdot d$	☒ Ja	☐ Nein
$d \cdot d^T$	☒ Ja	☐ Nein
$A + B \cdot C$	☒ Ja	■ Nein
$B \cdot d$	☐ Ja	☒ Nein
	+6	-0

6

Zu berechnen

6

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 56 & 41 \\ 92 & 68 \end{pmatrix}$$

$$d^T \cdot d = (14)$$

$$C^T + B = \begin{pmatrix} 7 & \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6

a)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & -4 & 2 & 3 \\
3 & & 3 & 3 & -3 & -3 \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & -1 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad (x-3)
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad (x-1)
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
-1 & & -1 & -1 \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad (x+1)
$$

$$z(x) = (x-3)(x-1)(x+1)^2$$

b) (iv)

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)(x+1)^{\cancel{2}}}{(x-2)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-3)}} = \frac{x^2-1}{x-2} = \underline{\underline{x+2}} + \frac{3}{(x-2)}$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{3}
\end{array}
$$

2. Sei $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3}{(x-2)(x+1)(x-3)}$	16

16

a. Geben Sie die reelle Faktordarstellung des Zählers von f an.
Verwenden Sie dazu das Hornerschema.
Ergebnis: $Z_f(x) = (x-3)(x-1)(x+1)^2$

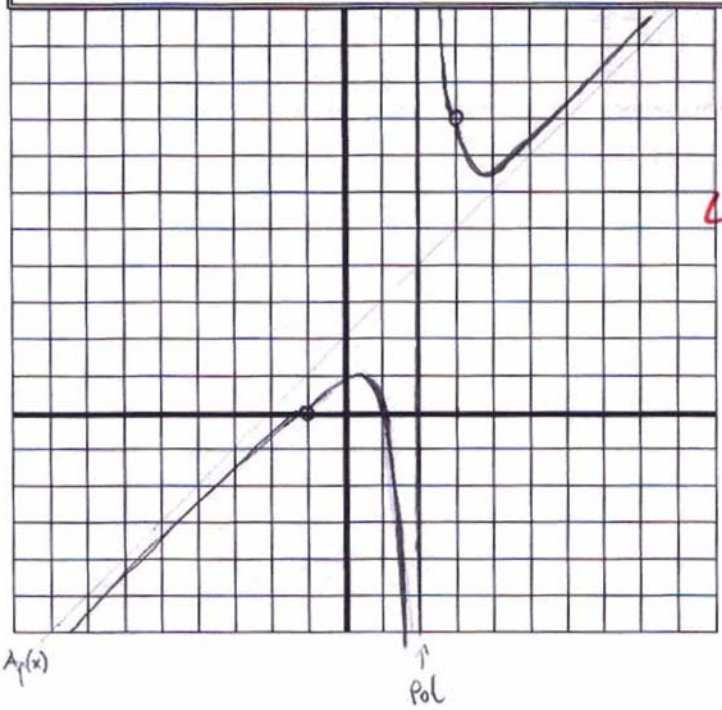
b. (i) maximaler Definitionsbereich von f
$\mathbb{R} \setminus \{2, -1, 3\}$

(ii) Nullstellen von f
$x_0 = 1$

(iii) Charakterisierung der Definitionslücken von f
$x_{h_1} = 3$ hebbare Lücke, $x_{h_2} = -1$ hebbare Lücke, $x_p = 2$ Pol mit VZW

(iv) die Asymptote von f
$A_f(x) = x + 2$

Skizze von f mit Hilfe von (i) - (iv): *(1 Einheit = 1 Karo!)*



3. a. Betrachtet wird die Aussage P(p,q,r) : $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg r \rightarrow r \wedge \neg q)$. 4 4
Geben Sie die Wahrheitstafel an.

b. Betrachtet wird die Aussage Q(p,q,r) : $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg r \rightarrow r \wedge \neg q)$. 6 6
Bestimmen Sie die kanonische disjunktive Normalform von Q(p,q,r) durch semantisch äquivalente Umformungen. Geben Sie bei jedem Schritt an, welche semantisch äquivalente Umformung Sie anwenden

c. In welcher Beziehung stehen die beiden Aussagen P(p,q,r) , Q(p,q,r)? 2 1

Zu a.

	p	q	r	¬	(p	∧	q)	↔	(¬p	∨	¬r	→	r	∧	¬q)
×	W	W	W	F		W		F	F	F	F	W		F	F
×	W	W	F	F		W		W	F	W	W	F		F	F
×	W	F	W	W		F		W	F	F	F	W		W	W
	W	F	F	W		F		F	F	W	W	F		F	W
	F	W	W	W		F		F	W	W	F	F		F	F
	F	W	F	W		F		F	W	W	W	F		F	F
×	F	F	W	W		F		W	W	W	F	W		W	W
	F	F	F	W		F		F	W	W	W	F		F	W
	Reihenfolge			2		1		9 (2,8)	3	5	4	8 (5,7)		7	6

Zu b. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg r \rightarrow r \wedge \neg q)$

$\overset{}{\underset{AV11}{\Leftrightarrow}} \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg(\neg p \vee \neg r) \vee (r \wedge \neg q))$

$\underset{AV11\ T15}{\Leftrightarrow} (p \wedge q) \vee (\neg(\neg p \vee \neg r) \vee (r \wedge \neg q))$

$\underset{T9\ 15}{\Leftrightarrow} (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (r \wedge \neg q)$

$\underset{5}{\Leftrightarrow} (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

Zu c. P impliziert Q semantisch

Wieso?

$P \Rightarrow Q$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (a^2-5) & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 2 & (\cdot -1) \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a-2 & \end{array}$$

für $a=2$ ✓ ∞L mit 1 fr. P.

für $a=-2$ ✓ $0L$

für $a \neq -2 \wedge a \neq 2$ $1L$

für $a=2$

$$\begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 1-2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \cdot \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = 2 + \lambda + 2\lambda - 1$$
$$= 1 + \lambda \cdot 3$$

für $a=-2$

/

für $a \neq 2 \wedge a \neq -2$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{a+2} \\ 1 - \frac{2}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 1 - \frac{2}{a+2}$$
$$x_1 = 2 + \frac{1}{a+2} - 1 + \frac{2}{a+2}$$
$$= 1 + \frac{3}{a+2}$$
$$x_3 = \frac{a-2}{(a^2-4)} = \frac{1}{a+2}$$

4. Betrachtet wird für reelle Zahlen a das folgende lineare Gleichungssystem: $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ $x_1 + x_2 + (a^2 - 5)x_3 = a$ Bestimmen Sie alle Werte von a, für die das LGS a. keine Lösung besitzt, b. genau eine Lösung besitzt, c. unendlich viele Lösungen besitzt: Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an. Verwenden Sie den Gaußschen Algorithmus.	12 11

Ergebnis: $a \in \mathbb{R}$

a. Keine Lösung,

wenn a $= -2$ $\mathbb{L} = \emptyset$

b. Genau eine Lösung,

wenn a $\neq 2 \wedge a \neq -2$ $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{a+2} \\ 1 - \frac{2}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{pmatrix} \right\}$

c. Unendlich viele Lösungen,

wenn a $= 2$ $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \cdot 3 \\ 1 - 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in R \right\}$ f

[redacted]

5. Gegeben seien die reellen Funktionen

$$f(x) = |x| \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

a. Geben Sie für f und g jeweils den maximalen Definitionsbereich an. 2 2

b. Bestimmen Sie die folgenden Funktionen und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich an : 8

f / g ; g o f ; f o g ; f o f ; g o g

c. Gibt es für f bzw. g eine Umkehrfunktion? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrfunktion und geben Sie ihren maximalen Definitionsbereich an. 4 4

	Zuordnungsvorschrift	Definitionsbereich
a.	$f(x) = \|x\|$	$\mathbb{R}$
	$g(x) = \frac{1}{x+1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
b.	$(f / g)(x) = \|x\| \cdot (x+1)$	$\mathbb{R}$ f
	$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\|x\|+1}$	$\mathbb{R}$
	$(f \circ g)(x) = \left\| \frac{1}{x+1} \right\|$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
	$(f \circ f)(x) = \|x\|$	$\mathbb{R}$
	$(g \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}+1} =$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ f
c.	Umkehrfunktion von f: nicht erklärt	
	Umkehrfunktion von g: $g^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$