11

TECHNISCHE FACHHOCHSCHULE BERLIN

University of Applied Sciences 40P / 2,0 RG

Lehrveranstaltung: Mathematik I für Medieninformatiker, MDB1a, WS 2007/08

Dipl. Phys. Rainer Gillert [redacted]

Klausur am 7.2.2008

Name: ________ **Vorname:** ________ **Matrikel-Nu.:** ________

1. Prüfungsversuch: X **2. Prüfungsversuch:** ___ **3.Prüfungsversuch:** ___

Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich diese Klausur alleine und ohne Aufzeichnungen, Taschenrechner oder sonstige Hilfsmitteln bearbeitet habe.

Unterschrift: ____________________

Aufgabe 1:

Im $\mathbb{R}^3$ sind die 3 Vektoren $\vec{a}_1 = p\left(\frac{1}{2}+t, 0, \frac{1}{2}-t\right)^T$, $\vec{a}_2 = q\left(s-1, s, s-1\right)^T$ und $\vec{a}_3 = p\left(\frac{1}{2}-t, 0, \frac{1}{2}+t\right)^T$.

Dabei sind $t, s, p, q \in \mathbb{R}$ reelle Parameter und $p, q \neq 0$.

i) Berechnen Sie p in Abhängigkeit von t und q in Abhängigkeit von s, so dass die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ Einheitsvektoren sind. Zeigen Sie, dass dann auch $\vec{a}_3$ ein Einheitsvektor ist.

ii) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ für fast alle Werte von t linear unabhängig sind. Für welche(n) Wert(e) ist dies nicht der Fall?

iii) Bestimmen Sie die Werte des Parameters t, für den die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ senkrecht aufeinander stehen. Welchen Wert muss nach (i) dann der Parameter p annehmen, damit die beiden Vektoren Einheitsvektoren sind. Geben Sie die so berechneten Vektoren explizit an! Diese Vektoren mögen $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_3$ heißen.

iv) Zeigen Sie, dass der Wert des Parameters s in $\vec{a}_2$ unabhängig vom Wert des Paramaters t in $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ so bestimmt werden kann, dass $\vec{a}_2$ senkrecht auf $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ steht. Bestimmen Sie daraus den Vektor $\vec{b}_2$, der die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_3$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt.

v) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} = (1,2,1)^T$ in der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

vi) Berechnen Sie für die Einheitsvektoren aus (i) den Parameterwert von t so, dass der Winkel zwischen den beiden Vektoren 60° beträgt.

(18 Punkte)

Aufgabe 2:

Wir betrachten den zweidimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. In ihm besteht eine komplexe Transformation aus 3 primitiven Transformationen: (a) einer Vertauschung von x und y Koordinate, (b) einer Rotation um einen beliebigen Winkel α in der x-y-Ebene und (c) einer erneuten Vertauschung von x und y Koordinate.

i. Geben Sie für die Transformationen (a) und (b) die Transformationsmatrizen an. Nennen Sie die Matrix zu (a) A und die Matrix zu (b) D!

ii. Zeigen Sie, dass die Matrix A zu sich selbst invers ist und dass es sich um eine orthogonale Transformation handelt.

iii. Berechnen Sie die Transformationsmatrix T der komplexen Transformation und ihre Inverse.

iv. Berechnen Sie die inverse M^{-1} der Matrix M:=AD.

v. Ist die Hintereinanderausführung von 2 oder mehr orthogonalen Transformationen stets auch wieder eine orthogonale Transformation? (Mit ausführlicher Begründung und Erläuterung!)

(10 Punkte)

Aufgabe 3:

i. Untersuchen Sie durch Aufstellen der Wahrheitswerttabelle, ob für die logische Äquivalenz das Assoziativgesetz gilt.

ii. Überprüfen Sie ohne Verwendung einer Wahrheitswerttabelle, ob die semantische Äquivalenz $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$ gilt.

iii. Überführen Sie die logischen Ausdrücke $p \to (p \to q)$ sowie $p \to q$ in die kanonisch disjunktive Normalform und vergleichen Sie die beiden so erhaltenen Ausdrücke. Was stellen Sie fest?

(7 Punkte)

Aufgabe 4:

Wir untersuchen, ob der Funktor der Implikation distributiv gegenüber dem Funktor der Äquivalenz ist. Es gibt zwei Möglichkeiten für dieses angenommene Distributivgesetz:

i. Linksseitige Distributivität: $p \to (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$

ii. Rechtsseitige Distributivität: $(p \leftrightarrow q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \leftrightarrow (q \to r)$

Untersuchen Sie ohne Verwendung von Wahrheitswerttabellen durch Aufstellen der jeweiligen kanonisch disjunktiven Normalformen, ob diese beiden semantischen Äquivalenzen gelten.

(10 Punkte)

Aufgabe 5:

In einem beliebigen Vektorraum sind Ihnen 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gegeben, von denen folgendes bekannt ist:

i. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0$

ii. $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\|\vec{c}\|$

Was können Sie über die Vektoren aussagen? (Sie können ziemlich viel aussagen!)

(5 Punkte)

- Lagebeziehung zueinander

- Raum, den sie aufspannen

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

Lesen Sie die Aufgabentexte sorgfältig! Konkrete Zahlenwerte sind so gewählt, dass im Ergebnis einfache, kleine Zahlen entstehen. Sollten Sie als Ergebnis etwa $\sqrt{5}$ erhalten, so gibt es keine Notwendigkeit hierfür eine Dezimalzahl anzugeben. $\sqrt{5}$ ist eine perfekte Zahl! Achten Sie auf die eventuell in den Aufgaben gegebenen Hinweise und vor allem: beachten Sie diese! Achten Sie in Ihren Lösungen auf eine logische, vollständige Darstellung dessen, was Sie tun um die Aufgabe zu lösen. Sie demonstrieren dadurch das Verständnis des Stoffes. Anders gesagt: Die alleinige Angabe eines korrekten Ergebnisses ohne nachzuvollziehenden Hintergrund garantiert Ihnen erheblichen Punktabzug!

Technische Hinweise:

$\sin(0°) = \cos(90°) = 0 \quad \sin(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2} \quad \sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \sin(60°) = \cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \sin(90°) = \cos(0°) = 1$

Drehmatrix $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Notenschlüssel: Es sind insgesamt 50 Punkte zu erreichen. Für eine Note von 4,0 sind mindestens 23 Punkte erforderlich. Halbe Punkte werden bei der Benotung der Einzelaufgaben vergeben. Die Gesamtzahl der Punkte wird auf die nächste volle Punktzahl nach oben gerundet.

Punkte	Zensur
49-50	1,0
46-48	1,3
43-45	1,7
40-42	2,0
37-39	2,3
34-36	2,7
31-33	3,0
28-30	3,3
25-27	3,7
23-24	4,0
< 23	5,0

Ich wünsche Ihnen allen ein gutes Gelingen!

- Rainer Gillert -

Aufgabe 1

i) $\|\vec{a}_1\| \overset{!}{=} 1$

$$1 = p^2\left(\left(\frac{1}{2}+t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right)$$

$$p^2 = \frac{1}{\frac{1}{4} + t + t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2}$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+2t^2}}$$

$\|\vec{a}_2\| \overset{!}{=} 1$

$$1 = q^2\left((s-1)^2 + s^2 + (s-1)^2\right)$$

$$q^2 = \frac{1}{s^2-2s+1+s^2+s^2-2s+1}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{3s^2-4s+1}}$$

$$\|\vec{a}_3\| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+2t^2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{1}{2}+t\right)^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-2t+t^2+\frac{1}{4}+2t+t^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+2t^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+2t^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+2t^2}} = 1 \;\square$$

3

iv) $\langle a_2 | a_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} s-1 \\ s \\ s-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+t \\ 0 \\ \frac{1}{2}-t \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$$0 = (s-1)\left(\frac{1}{2}+t\right) + (s-1)\left(\frac{1}{2}-t\right)$$

$$0 = \frac{1}{2}s + st - t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} - st + t$$

$$0 = s - 1$$

$$s = 1$$

$\langle a_2 | a_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} s-1 \\ s \\ s-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-t \\ 0 \\ \frac{1}{2}+t \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$$0 = (s-1)\left(\frac{1}{2}-t\right) + (s-1)\left(\frac{1}{2}+t\right)$$

$$0 = s-1$$

$$s = 1$$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3

Da die Variable t wegfällt, ist s unabhängig von t.

ii)

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+t & \frac{1}{2}-t \\ \frac{1}{2}-t & \frac{1}{2}+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren der Matrix (und damit die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ sind linear unabhängig, wenn die Determinante ungleich 0 ist.

$$\det(M) = \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+t\right)^2 = \frac{1}{4} - 2t + t^2 - \left(\frac{1}{4} + 2t + t^2\right)$$

$$= \frac{1}{4} - 2t + t^2 - \frac{1}{4} - 2t - t^2 = -4t$$

3

Also sind die Vektoren für $\underline{t=0}$ nicht linear unabhängig. ✓

iii) $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+t \\ 0 \\ \frac{1}{2}-t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-t \\ 0 \\ \frac{1}{2}+t \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad 0 = \left(\frac{1}{2}+t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right) + \left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{1}{2}+t\right)$

$0 = 2\left(\frac{1}{4} - t^2\right) \qquad t^2 = \frac{1}{4} \qquad \underline{t = \pm \frac{1}{2}}$ ✓

$$\vec{b}_1 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_3 = p\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3

Für $\|\vec{b}_1\| = 1$ und $\|\vec{b}_3\| = 1$ ist $\underline{p = 1}$. ✓

v) $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Die Koordinaten sind $\vec{x}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

✓ 3

vi) $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2t^2 - \frac{1}{2}}} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+t \\ 0 \\ \frac{1}{2}-t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-t \\ 0 \\ \frac{1}{2}+t \end{pmatrix} \right\rangle$

$\frac{\sqrt{2t^2 - \frac{1}{2}}}{2} = 2\left(\frac{1}{4} - t^2\right) \qquad 2t^2 - \frac{1}{2} = \cancel{4}\,16!\left(\frac{1}{\cancel{16}\,4} - \frac{t^2}{\cancel{4}} + 4t^4\right)$

nicht zu viel auf einmal machen!

$2t^2 + t^2 - 4t^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad -4t^4 + 3t^2 - \frac{3}{4} = 0$ f

1,5

Aufg 1: 16,5

Aufgabe 2

i) a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ✓ 2

ii) Da A selbst eine Einheitsmatrix ist, hat auch die Multiplikation mit sich selbst eine Einheitsmatrix als Ergebnis. ?

Da $A \cdot A^{-1} = I$ und $A = I$, gilt $I \cdot A^{-1} = I$ und $A^{-1} = \frac{I}{I} = I$ ✓ 2

iii) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ✓ 2

iv) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonale Matrix

$a\sin\alpha + c\cos\alpha = 1$ $\quad \Rightarrow D^{-1} = D^T$!

$b\sin\alpha + d\cos\alpha = 0$ $\quad b\sin\alpha = -d\cos\alpha$

$a\cos\alpha + c\sin\alpha = 0$ $\quad a \cdot \cos\alpha = c\sin\alpha$

$b\cos\alpha + d\sin\alpha = 1$ $\quad$ 0/0

$M^{-1} = ($

Aufg 2: ~~7~~ 6

Aufgabe 3

i) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

p	↔*	q	↔	r	p	↔	q	↔*	r
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	f	f	w	f	w	f	f
w	f	f	f	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	f	w	f
f	f	w	f	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	f	f	f	f	f	w	f

*höhere Priorität

Haben den selben Wahrheitswertverlauf.
Somit gilt das Assoziativgesetz. ✓ 3

ii) $p \to (q \to r)$
$= \bar{p} + (q \to r)$
$= \bar{p} + (\bar{q} + r)$
$= \bar{p} + \bar{q} + r$

$(p \land q) \to r$
$= \overline{pq} + r$
$= \bar{p} + \bar{q} + r$ ✓

Die beiden Ausdrücke sind identisch und somit gilt die logische Äquivalenz.

3

iii) $p \to (p \to q)$
$= \bar{p} + (p \to q)$
$= \bar{p} + (\bar{p} + q)$
$= \bar{p} + \bar{p} + q$
$= \bar{p} + q$
$= \bar{p}(q + \bar{q}) + q(p + \bar{p})$
$= \bar{p}q + \bar{p}\bar{q} + qp + q\bar{p}$

$p \to q$
$= \bar{p} + q$
$= \bar{p}(q + \bar{q}) + q(p + \bar{p})$
$= \bar{p}q + \bar{p}\bar{q} + qp + q\bar{p}$ ✓

Die KDNF der beiden Ausdrücke ist dieselbe, also gilt auch hier die Äquivalenz.

1

Aufg. 3: 7

Aufgabe 4

$p \to (q \leftrightarrow r)$

$= \bar{p} + (q \leftrightarrow r)$ ✓

$= \bar{p} + (q \to r)(r \to q)$ ✓

$= \bar{p} + (\bar{q} + r)(\bar{r} + q)$ ✓

$= \bar{p} + \bar{q}\bar{r} + \underbrace{r\bar{r}}_{0} + \underbrace{\bar{q}q}_{0} + qr$ f

$= \bar{p} + qr + \bar{q}\bar{r}$ f

$= \bar{p}(q+\bar{q}) + q\bar{r}(p+\bar{p}) + \bar{q}\bar{r}(p+\bar{p})$ ✓

$= \bar{p}q + \bar{p}\bar{q} + q\bar{r}p + q\bar{r}\bar{p} + \bar{q}\bar{r}p + \bar{q}\bar{r}\bar{p}$

$= \bar{p}q(r+\bar{r}) + \bar{p}\bar{q} + q\bar{r}p + q\bar{r}\bar{p} + \bar{q}\bar{r}p + \bar{q}\bar{r}\bar{p}$

$= \bar{p}qr + \bar{p}q\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}\bar{q}\bar{r} + q\bar{r}p + \cancel{q\bar{r}\bar{p}} + \bar{q}\bar{r}p + \cancel{\bar{q}\bar{r}\bar{p}}$

$= pq\bar{r} + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}qr + \bar{p}q\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ (✓)

$(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$

$= [(p \to q) \to (p \to r)][(p \to r) \to (p \to q)]$

$= [\overline{(\bar{p}+q)} + (\bar{p}+r)][\overline{(\bar{p}+r)} + (\bar{p}+q)]$

$= (p\bar{q} + \bar{p} + r)(p\bar{r} + \bar{p} + q)$

$= p\bar{q}p\bar{r} + \underbrace{p\bar{q}\bar{p}}_{0} + \underbrace{p\bar{q}q}_{0} + \underbrace{\bar{p}p\bar{r}}_{0} + \bar{p}\bar{p} + \bar{p}q + \underbrace{rp\bar{r}}_{0} + r\bar{p} + rq$

$= p\bar{q}\bar{r} + \bar{p} + \bar{p}q + \bar{p}r + qr$

$= p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}q + \bar{p}\bar{q} + \bar{p}q + pq\bar{r} + \bar{p}qr + \bar{p}\bar{q}r + pqr + \bar{p}qr$

$= p\bar{q}\bar{r} + \cancel{\bar{p}qr} + \bar{p}q\bar{r} + \cancel{\bar{p}\bar{q}r} + \bar{p}\bar{q}\bar{r} + \cancel{\bar{p}qr} + \cancel{pq\bar{r}} + \cancel{\bar{p}qr} + \bar{p}\bar{q}r$
$+ pqr + \bar{p}qr$

$= pqr + \bar{p}qr + \bar{p}q\bar{r} + p\bar{q}\bar{r} + pq\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ f

Die beiden Ausdrücke sind nicht äquivalent, somit gilt die linksseitige Distributivität nicht.

ohne Rechenfehler schon! 4

ii) $(p \leftrightarrow q) \to r$

$= (p \to q)(q \to p) \to r$

$= \overline{(\bar{p}+q)(\bar{q}+p)} + r$

$= \overline{\bar{p}+q} + \overline{\bar{q}+p} + r$

$= p\bar{q} + q + \bar{p} + r$

$= p\bar{q}r + p\bar{q}\bar{r} + qpr + \cancel{q\bar{p}r} + qp\bar{r} + q\bar{p}\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}\bar{q}\bar{r} + \bar{p}\bar{q}\bar{r} + \cancel{\bar{p}qr} + \bar{p}qr + \cancel{p\bar{q}r} + \cancel{\bar{p}\bar{q}r} + \cancel{pqr}$

$= pqr + \bar{p}qr + p\bar{q}r + pq\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r + \bar{p}q\bar{r} + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}\bar{q}\bar{r}$

$(p \to r) \leftrightarrow (q \to r)$

$= [(p \to r) \to (q \to r)][(q \to r) \to (p \to r)] = [(\bar{p}+r) \to (\bar{q}+r)][(\bar{q}+r) \to (\bar{p}+r)]$

$= (\overline{\bar{p}+r} + \bar{q}+r)(\overline{\bar{q}+r} + \bar{p}+r) = (p\bar{r} + \bar{q}+r)(q\bar{r} + p + r)$

$= pq\bar{r} + p\bar{r} + p\bar{q} + \bar{q}r + pr + r$

$= pq\bar{r} + \cancel{pq\bar{r}} + p\bar{q}r + \cancel{p\bar{q}r} + p\bar{q}\bar{r} + \cancel{p\bar{q}r} + \bar{p}\bar{q}r + \cancel{pqr} + \cancel{p\bar{q}r} + \bar{p}qr + \cancel{p\bar{q}r} + \cancel{\bar{p}\bar{q}r} + pqr$

$= pqr + \bar{p}qr + p\bar{q}r + pq\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}\bar{q}\bar{r}$

Die KDNF ist nicht identisch, also gilt die rechtsseitige Distributivität nicht. ✓ 5

Aufg. 4: 9